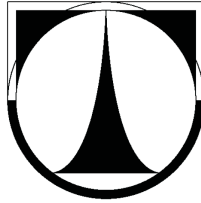


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI  
FAKULTA MECHATRONIKY A MEZIOBOROVÝCH INŽENÝRSKÝCH STUDÍ



AUTOREFERÁT DIZERTAČNÍ PRÁCE

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA DISKRETIZOVANÉHO  
MODELU PIEZOELEKTRICKÉHO REZONÁTORU

PETR RÁLEK

LIBEREC, ČERVENEC 2006

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI  
FAKULTA MECHATRONIKY A MEZIOBOROVÝCH INŽENÝRSKÝCH STUDIÍ

OBOR: PŘÍRODOVĚDNÉ INŽENÝRSTVÍ

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA DISKRETIZOVANÉHO  
MODELU PIEZOELEKTRICKÉHO REZONÁTORU

PETR RÁLEK

ŠKOLITEL: PROF. ING. JIŘÍ MARYŠKA, CSc.

ROZSAH PRÁCE:

POČET STRAN TEXTU: 76

POČET TABULEK: 2

POČET OBRÁZKŮ: 35

# Anotace

Předkládaná dizertační práce se zabývá modelováním rezonančních charakteristik piezoelektrických rezonátorů. Je uveden fyzikální popis piezoelektrických materiálů za použití lineárních piezoelektrických stavových rovnic a dále je definována úloha kmitání piezoelektrických rezonátorů. Následuje slabá formulace úlohy a její diskretizace metodou konečných prvků, která vede na zobecněnou úlohu vlastních čísel s řídkými a strukturovanými maticemi. Pro její řešení je použit implicitně restartovaný Arnoldiho algoritmus (IRA). Vyřešením algebraické úlohy lze nalézt rezonanční frekvence piezoelektrického rezonátoru. Pomocí koeficientů elektromechanické vazby jednotlivých módů kmitání jsou posléze vybrány dominantní módy.

Implementace modelu zahrnuje vytvoření geometrie rezonátoru, sestavení úlohy vlastních čísel, její řešení a následně identifikaci jednotlivých módů a jejich rozřídění dle významnosti. K tvorbě geometrie a sítě je použit volně dostupný software GMSH, pro řešení algebraické úlohy je použita implementace metody IRA z volně dostupné knihovny ARPACK. Ostatní součásti programové implementace jsou prací autora.

Program byl testován na podélném a torzním kmitání piezoelektrické tyčinky (s velmi dobrou shodou s analytickým řešením) a posléze na reálné úloze tloušťkově střižných kmitů planoparalelního křemenného rezonátoru. Zde byly nalezeny správné dominantní módy kmitů, přičemž odchylka od naměřených rezonančních frekvencí činí asi 15%. Relativní odstup jednotlivých rezonančních frekvencí zůstal dobře zachován.

Motivací práce bylo navržení a implementace kompaktního softwarového modulu, který by mohl sloužit při procesu návrhu a výroby piezoelektrických prvků s požadovanými rezonančními vlastnostmi. Uvedenou odchylku od naměřených rezonančních frekvencí lze odstranit kalibrací modelu na danou úlohu a, při uvážení kvalitativní správnosti výsledků modelu, lze tento v dané oblasti prakticky využívat.

# Abstract

The aim of the thesis is the modelling of resonant characteristics of piezoelectric resonators. It contains the physical description of piezoelectric materials, using the linear piezoelectric constitutive equations, and then the problem of oscillation of the piezoelectric resonators is defined. It is followed by the weak formulation of the problem and its discretization by the finite element method, which leads to the generalized eigenvalue problem with sparse structured matrices. For their solving, the implicitly restarted Arnoldi algorithm (IRA) is used. The resonant frequencies are subsequently found by solving this eigenvalue problem and the dominant oscillation modes are then selected according to their electromechanical coupling coefficients.

The computer implementation of the model consists of building of the resonator's geometry, of compilation of the eigenvalue problem and its solving, and then of the identification of the particular oscillation modes and their sorting according to their significance. For the creation of the geometry and the mesh, the freely available software GMSH is used. For solving the algebraic problem, the implementation of IRA from the ARPACK library is used. The remaining parts of the computer implementation were made by the author.

The model was tested on the longitudinal and torsional oscillation of the piezoelectric beam (with very good agreement with the analytical solution) and then used on the practical problem of the thickness shear vibration of the in-plane parallel quartz resonator. In this problem, the right dominant oscillation modes were found. The relative errors from the measurement were about 15%. The relative distances between the particular dominant modes were well preserved. The motivation of the work was the design and implementation of the compact software module, which would be suitable in the design process and the production of the piezoelectric devices with demanded resonant properties. The above mentioned deviation from the measurement can be eliminated by the calibration of the model to the given task and, with respect to the qualitative rightness of the results, the model can practically be used.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>1 Fyzikální popis úlohy</b>	<b>8</b>
Fyzikální popis piezoelektrických materiálů . . . . .	8
Kmitání piezoelektrického kontinua . . . . .	9
<b>2 Slabá formulace a diskretizace úlohy</b>	<b>11</b>
Slabá formulace . . . . .	11
Diskretizace úlohy . . . . .	11
<b>3 Oblasti zájmu</b>	<b>13</b>
Volné kmitání . . . . .	13
Výběr dominantních módů . . . . .	13
<b>4 Numerické metody řešení algebraické úlohy</b>	<b>15</b>
Krylovovské metody . . . . .	15
Arnoldiho faktorizace . . . . .	15
Implicitně restartovaný Arnoldiho algoritmus . . . . .	16
Zobecněný problém vlastních čísel . . . . .	16
Poznámky - snaha o redukci velikosti algebraické úlohy . . . . .	16
<b>5 Počítačová implementace modelu</b>	<b>17</b>
<b>6 Testování modelu</b>	<b>18</b>
Kmitání křemenné tyčinky . . . . .	18
Podélné kmity . . . . .	18
Torzní kmity . . . . .	19
<b>7 Aplikace modelu na reálné úloze –</b>	
<b>kmitání planparalelního křemenného rezonátoru</b>	<b>23</b>
Výsledky . . . . .	23
<b>8 Závěr</b>	<b>27</b>
<b>Bibliography</b>	<b>28</b>

# Úvod

## Piezelektrické materiály a jejich využití

Počátky zájmu o piezelektrické materiály sahají až ke konci 19. století, kdy bratři Curieové objevili přímý piezelektrický jev – stlačení krystalu vyvolalo elektrický náboj na jeho povrchu. Později objevili také zpětný piezelektrický jev – deformaci krystalu způsobenou elektrickým polem. Postupně bylo objeveno mnoho materiálů vykazujících piezelektrické vlastnosti, jako např. krystalický křemen, PZT keramiky, polymerní sloučeniny apod.

Ve 20. letech minulého století se začaly piezelektrické materiály hojně využívat v průmyslové výrobě. Dnes se používají např. v měřicí technice, jako senzory veličin, jako generátory vln apod. Podstatnou roli v těchto aplikacích hrají piezelektrické rezonátory.

**Piezelektrické rezonátory** Piezelektrický rezonátor je tenká tyčinka či destička vyrobená z piezelektrického materiálu, na svém povrchu opatřená dvěma či více elektrodami (např. [27]). V důsledku harmonického buzení elektrickým polem rezonátor kmitá. Parametrem, popisujícím chování rezonátoru, jsou jeho rezonanční frekvence.

Ne každý mód kmitání lze vybudit stejně snadno, mnohé jsou tlumeny díky materiálovým a tvarovým vlastnostem rezonátoru. Je důležité nalézt takové módy kmitů, které lze vybudit snadněji než ostatní. Pracovní oblast rezonátoru se pak pohybuje v okolí dominantní frekvence. Piezelektrické rezonátory se používají např. jako stabilizátory frekvencí elektrických obvodů, frekvenční filtry, senzory neelektrických veličin apod.

## Motivace dizertační práce

Rezonanční frekvence piezelektrických rezonátorů se v praxi (ve výrobě) obvykle zjišťují analytickými či experimentálními metodami. Analytické metody jsou ovšem plně použitelné jen pro jednoduché tvary rezonátorů a základní módy kmitů. Nevýhodou experimentálního testování jsou jeho náklady.

**Role matematického modelování** Matematické modely, v závislosti na jejich komplexnosti, mohou překlenout nevýhody jiných metod. Matematické modelování piezelektrických materiálů se začalo v hojně míře využívat v posledních 10 až 15 letech, ačkoli první formulace metody konečných prvků (MKP) pro tuto oblast byla publikována již v roce 1970 Allikem a Hughesem [1].

Zmíníme několik publikací, popisujících různé oblasti modelování piezelektrických materiálů. Roku 1990 byla publikována obecná formulace pro 2D a 3D metodu konečných prvků [10]. Publikace [24], [8], [17] (v letech 1991-1996) prezentovaly numerické výsledky pro aktivní kontrolu vibrací s využitím piezelektrických materiálů. Pokusy s využitím konečných prvků vyšších řádů jsou uvedeny např. v [13] nebo [6]. V současné době se také začínají využívat skořepinové

prvky využívající Mindlinovy teorie (např. [25]). Podrobná rešerše literatury je uvedena např. v [15].

Uvedené publikace se většinou buď nevěnují popisu numerického řešení úlohy, nebo využívají některý z komerčně dostupných programových balíčků (např. ANSYS či ABAQUS, které mají implementovány základní piezoelektrické moduly).

**Cíl dizertační práce** V práci je popsán MKP model piezoelektrického rezonátoru. Vychází se z fyzikálního popisu piezoelektrického kontinua. Slabá formulace a následná diskretizace problému vede na rozměrný lineární systém s řídkými strukturovanými maticemi, pomocí kterých je definován zobecněný problém vlastních čísel. Jeho řešením lze pak nalézt rezonanční frekvence.

Důraz je kladen na výše uvedený zobecněný problém vlastních čísel. V závislosti na parametru diskretizace se může jednat o velmi rozměrnou úlohu, proto je nutné zajistit její efektivní řešení. Je třeba zmínit, že obvykle není třeba znát celé spektrum daného problému (všechny rezonanční frekvence), ale zajímají nás hlavně frekvence dominantní. Pro řešení částečného problému vlastních čísel pak lze s úspěchem použít některou z algebraických metod založenou na krylovovských podprostorech.

Cílem práce je, na základě diskretizovaného modelu piezoelektrického rezonátoru, navrhnout, implementovat a otestovat efektivní numerický algoritmus a vytvořit ucelený programový prostředek pro výpočet dominantních rezonančních frekvencí a výsledky porovnat s měřeními.

Takto sestavený programový modul je použitelný pro rezonátory různých tvarů a jeho výsledky mohou být použity při návrhu a konstrukci rezonátorů s požadovanými vlastnostmi.

## Struktura dizertační práce

První kapitola obsahuje fyzikální popis piezoelektrických materiálů, kombinující pohybové rovnice pro kmitání s lineárními piezoelektrickými stavovými rovnicemi. Dále jsou zde uvedeny všechny nezbytné veličiny a pojmy.

Druhá kapitola popisuje matematickou formulaci daného problému, dále slabou formulaci problému a její diskretizaci pomocí MKP, vedoucí na řešení zobecněného problému vlastních čísel.

Ve třetí kapitole je obsažen popis různých úloh v modelování piezoelektrických materiálů s důrazem na úlohu volného kmitání a nalezení dominantních módů kmitání.

Čtvrtá kapitola se věnuje popisu Krylovovských metod a jejich použití pro řešení rozměrných problému vlastních čísel, jmenovitě popisu implicitně restartovaného Arnoldiho algoritmu.

Softwarové implementaci modelu je věnována pátá kapitola, obsahující stručný popis programovacích prací a jednotlivých softwarových modulů.

Šestá kapitola obsahuje výsledky numerického testování modelu na analyticky řešitelných úlohách kmitání piezoelektrické tyčinky. Výsledky vykazují dobrou shodu s analytickým řešením.

Sedmá kapitola se věnuje aplikaci modelu na reálné úloze tloušťkově střížných kmitů planparalelního rezonátoru. Numerické výsledky vykazují kvalitativní shodu s měřeními (byly identifikovány správné módy jako dominantní), absolutní odchylka od měření činí okolo 15%. Relativní vzdálenosti mezi jednotlivými dominantními frekvencemi byly dobře zachovány.

# Fyzikální popis úlohy

V této kapitole jsou popsány základní fyzikální vlastnosti piezoelektrických materiálů a formulován problém kmitání piezoelektrického rezonátoru. Podrobnější popis piezoelektrických materiálů lze nalézt např. v [27].

## Fyzikální popis piezoelektrických materiálů

**Piezoelektrické stavové rovnice** Piezoelektrický krystal představuje strukturu, kde na sobě vzájemně závisejí deformace a elektrické pole. V lineární teorii je tento vztah popsán dvojicí stavových rovnic [22]: zobecněným Hookovým zákonem

$$\mathbf{T}_{ij} = c_{ijkl} \mathbf{S}_{kl} - d_{kij} \mathbf{E}_k, \quad i, j = 1, 2, 3$$

a rovnicí přímého piezoelektrického jevu

$$\mathbf{D}_k = d_{kij} \mathbf{S}_{ij} + \varepsilon_{kj} \mathbf{E}_j, \quad k = 1, 2, 3.$$

Hookův zákon vyjadřuje vztah mezi symetrickými tenzory napětí  $\mathbf{T}$ , deformace  $\mathbf{S}$  a vektorem intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ . Rovnice přímého piezoelektrického jevu vyjadřuje vztah mezi vektorem elektrického posunutí  $\mathbf{D}$ , deformací a elektrickým polem. Platí známé vztahy

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right], \quad \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

kde  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$  je vektor posunutí a  $\tilde{\varphi}$  je elektrický potenciál<sup>1</sup>. Koeficienty  $c_{ijkl}$ ,  $d_{kij}$  a  $\varepsilon_{ij}$  reprezentují symetrické materiálové tenzory, popsané v dalším odstavci.

**Materiálové vlastnosti** Vlastnosti piezoelektrického rezonátoru úzce závisejí na materiálu, z něhož je rezonátor vyroben, a jsou charakterizovány pomocí výše uvedených materiálových tenzorů. Stavové rovnice jsou lineárními aproximacemi termodynamických stavových rovnic a materiálové tenzory v nich hrají roli materiálových konstant. Z podmínek termodynamické stability pak plyne, že tenzory  $c_{ijkl}$  a  $\varepsilon_{ij}$  musejí být symetrické a pozitivně definitní [18].

Tensor elastických modulů  $c_{ijkl}$  je symetrický ve všech svých indexech a má obecně jen 21 nezávislých složek. Tensor piezoelektrických koeficientů  $d_{ijk}$  je symetrický ve druhých dvou indexech a má obecně 18 nezávislých složek. Tensor permitivity  $\varepsilon_{ij}$  je symetrický a má 6 nezávislých složek. Všechny tenzory lze díky jejich symetrii jednoznačně zapsat pomocí zkrácené indexace jako matice [27].

Symetrie a pozitivní definitnost materiálových tenzorů mají přímý vliv na vlastnosti matic vzešlých z pozdější diskretizace úlohy.

---

<sup>1</sup>Vlnovka značí závislost na čase. Pro harmonické kmity pak budou označení bez vlnovky vyjadřovat amplitudy kmitů.



# Kmitání piezoelektrického kontinua

**Kmitání a rezonance elastických materiálů** Kmitání piezoelektrického systému je zobrazením kmitání čistě elastických materiálů, proto zde lze užít stejné terminologie a principů. Stručně shrňme obecné postupy při výpočtu kmitání elastického systému (podrobněji popsáno např. v [4]). Je-li systém (těleso, množina hmotných bodů apod.) vychýlen vnějším zásahem z rovnovážného stavu a poté je ponechán bez dalšího zatížení, začne kmitat volnými kmity. Volné kmitání je kombinací všech vlastních kmitů daného systému s příslušnými vlastními frekvencemi.

Uvažujme systém se soustředěnými parametry s  $n$  stupni volnosti. Volné netlumené kmitání je popsáno pohybovou rovnicí

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbb{K} \mathbf{u} = 0,$$

kde  $\mathbf{u}^T = [u_1, \dots, u_n]$  je vektor posunutí,  $\mathbb{M}$  je hmotnostní matice a  $\mathbb{K}$  je elastická matice. Uvažujme-li řešení pohybové rovnice ve tvaru  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}e^{i\omega t}$ , řešení pohybové rovnice je ekvivalentní řešení zobecněného problému vlastních čísel

$$(\mathbb{K} - \lambda\mathbb{M}) \mathbf{v} = 0, \quad \lambda \equiv \omega^2.$$

Řešením úlohy je množina  $n$  vlastních čísel a  $n$  vlastních vektorů obsahujících rozložení amplitud kmitů.

Kmitá-li systém v důsledku (obvykle harmonického) vnějšího buzení  $\mathbf{f}(t)$ , hovoříme o vyuceném kmitání. To je popsáno pohybovou rovnicí

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbb{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}(t).$$

Je-li frekvence buzení rovna některé z vlastních frekvencí systému, dochází k rezonanci a příslušný mód kmitání je velmi silně vybuzen.

Kmitání elastických materiálů se řeší buď analytickými metodami nebo diskretizací úlohy (např. na výše uvedený systém se soustředěnými parametry). Metoda konečných prvků (MKP) je dnes nejpoužívanější diskretizační metodou.

**Kmitání piezoelektrického kontinua** Uvažujme piezoelektrický rezonátor s hustotou  $\rho$ , popsáný materiálovými tenzory. Označme objem rezonátoru jako  $\Omega$  a jeho povrch jako  $\Gamma$ . Chování rezonátoru je v určitém časovém intervalu  $[0, T]$  popsáno dvěma diferenciálními rovnicemi: Newtonovou pohybovou rovnicí

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3,$$

a kvazistatickou aproximací Maxwellovy rovnice [12]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0.$$

Po dosazení ze stavových rovnic dostáváme diferenciální rovnice pro posunutí a elektrický potenciál

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} \right] + d_{kij} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_k} \right) \quad i = 1, 2, 3, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( d_{kij} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right] - \varepsilon_{kj} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

se sadou počátečních a okrajových podmínek:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(\cdot, 0) &= u_i, & x \in \Omega, \\
\tilde{u}_i &= 0, & i = 1, 2, 3, \quad x \in \Gamma_u, \\
T_{ij}n_j &= f_i, & i = 1, 2, 3, \quad x \in \Gamma_f, \\
\tilde{\varphi}(\cdot, 0) &= \varphi, \\
\tilde{\varphi} &= \varphi_D, & x \in \Gamma_\varphi, \\
D_k n_k &= q, & x \in \Gamma_q,
\end{aligned}$$

kde

$$\Gamma_u \cup \Gamma_f = \Gamma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset, \quad \Gamma_\varphi \cup \Gamma_q = \Gamma, \quad \Gamma_\varphi \cap \Gamma_q = \emptyset.$$

Pravá strana  $f_i$  značí mechanické buzení vnější silou,  $q$  značí elektrické buzení pomocí přiloženého náboje (v případě volných kmitů jsou pravé strany nulové). Těmito rovnicemi je definována úloha kmitání piezoelektrického kontinua za daných okrajových podmínek. Úloha bude dále numericky řešena pomocí diskretizace MKP.

**Statická deformace piezoelektrického kontinua** Kromě úlohy kmitání lze v oblasti piezoelektrických materiálů řešit také statickou úlohu zatížení piezoelektrického prvku konstantní silou či elektrickým polem. První případ nachází uplatnění v oblasti aktuátorů, druhý v oblasti senzorů. Statická úloha je speciálním případem úlohy obecné (je zde  $\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} = 0$ ).

# Slabá formulace a diskretizace úlohy

V této kapitole je opsáno odvození slabé formulace a následná diskretizace pomocí MKP, vedoucí na systém obyčejných diferenciálních rovnic a následně na zobecněný problém vlastních čísel. Podrobnější výklad této oblasti přináší např. [16], v práci je uveden stručný přehled.

## Slabá formulace

Diskretizace úlohy je založena na tzv. slabé formulaci. Idea slabé formulace je převést vztahy popsané diferenciálními rovnicemi na vztahy integrální a požadovat jejich splnění v určitém funkcionálním smyslu, čímž omezíme požadavky na hladkost hledaného řešení (zároveň toto řešení má stále fyzikální smysl).

**Prostory funkcí** Ve slabé formulaci používáme Sobolevovy prostory  $W_2^{(1)}(\Omega)$  funkcí, jejichž zobecněná derivace je ve druhé mocnině integrabilní na oblasti  $\Omega$ , a dále prostor testovacích funkcí  $V(\Omega)$  tvořený funkcemi z  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , které mají nulovou stopu na hranici  $\Gamma$ .

**Integrální rovnosti** Slabou formulaci pro prostorovou proměnnou odvodíme standardním způsobem [16], znásobením diferenciálních rovností testovacími funkcemi  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in [V(\Omega)]^3$ ,  $\phi \in V(\Omega)$ , zintegrováním přes oblast  $\Omega$ , aplikací Greenovy formule a dosazením okrajových podmínek dostáváme integrální rovnosti

$$\left( \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2}, w_i \right)_\Omega + (c_{ijkl} S_{kl}, R_{ij})_\Omega + \left( d_{kij} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_k}, R_{ij} \right)_\Omega = \left\langle f_i, w_i \right\rangle_{\Gamma_f},$$
$$\left( d_{jik} S_{ik}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_\Omega - \left( \varepsilon_{ji} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_\Omega = \left\langle q, \phi \right\rangle_{\Gamma_q}.$$

kde  $R_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right]$ . Po slabém řešení pak požadujeme splnění těchto rovností pro všechny volby testovacích funkcí.

## Diskretizace úlohy

MKP konstruuje konečnědimenzionální aproximaci slabého řešení. Používáme standardní Lagrangeovské čtyřstěny, aproximující oblast  $\Omega$ , s lineárními bazickými funkcemi. Dosazením aproximací posunutí a elektrického potenciálu do integrálních rovností dostáváme po úpravě systém obyčejných diferenciálních rovnic, který lze zapsat v blokovém tvaru:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} + \mathbb{P}^T\Phi = \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbb{P}\mathbf{U} - \mathbb{E}\Phi = \mathbf{Q}. \quad (2)$$

$\mathbb{K}$  je elastická matice,  $\mathbb{M}$  je hmotnostní matice,  $\mathbb{P}$  je piezoelektrická matice a  $\mathbb{E}$  je elektrická matice. Vektory  $\mathbf{U}$  a  $\Phi$  obsahují hodnoty posunutí a potenciálu v uzlech diskretizace. Pravá strana obsahuje silové a elektrické buzení kmitů.

Po zavedení Dirichletových okrajových podmínek pro posunutí (upevnění rezonátoru) a elektrický potenciál (umístění elektrod, uzemnění) dostáváme redukovanou soustavu stejného tvaru, kde jsou bloky  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{M}$  a  $\mathbb{E}$  symetrické a pozitivně definitní [11] (celá matice systému je symetrická, obecně indefinitní). Všechny bloky matice jsou řídké.

# Oblasti zájmu

V této kapitole jsou popsány typy úloh, se kterými se lze setkat v oblasti modelování piezoelektrických materiálů. Důraz je kladen na úlohu volného kmitání, jež bude později řešena, ostatní úlohy (tlumené kmitání, statický problém, aktivní tlumení vibrací) zde slouží spíše jako dokumentace možných oblastí, které je možno za současného stavu řešit, a nebudou je v autoreferátu podrobněji uvádět.

## Volné kmitání

Těžiště popisu chování piezoelektrického rezonátoru leží v jeho volných kmitech. Ty určují, kdy může systém pod vnějším buzením dosáhnout rezonance (a na jaké frekvenci má být vnější buzení).

V literatuře se rozlišují dva typy volného kmitání piezoelektrických rezonátorů. První z nich je kmitání se zkratovanými elektrodami, kdy pro tenké vrstvy můžeme předpokládat  $\Phi = 0$  v celém objemu rezonátoru a problém se redukuje na standardní úlohu známou z kmitání čistě elastických materiálů,  $\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} = 0$ , se stejným postupem řešení.

Druhý typ, obecnější a lépe vystihující skutečný stav, je volné kmitání s otevřenými elektrodami, kdy řešíme kompletní problém vzešlý z diskretizace úlohy,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M} & \mathbb{P}^T \\ \mathbb{P} & -\mathbb{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\omega$  je úhlová frekvence volného kmitání.

Rozšířenou metodou při řešení této úlohy je tzv. statická kondenzace, což je dosazení za elektrický potenciál z druhé rovnice do první, kdy dostáváme úlohu podobnou standardní úloze kmitání elastických materiálů, ovšem s pozměněnou elastickou maticí,  $(\mathbb{K} - \mathbb{P}^T\mathbb{E}^{-1}\mathbb{P})\mathbf{U} = \omega^2\mathbb{M}\mathbf{U}$ . Při tomto postupu ztrácíme řádkou strukturu původní matice, navíc je nutné invertovat submatici  $\mathbb{E}$ .

Proto bylo cílem použít metodu, která by za účelem efektivního výpočtu zachovala původní strukturu matic a nevyžadovala její úpravy. Úkolem je tedy řešit zobecněný problém vlastních čísel

$$\mathbb{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{X}$$

pro

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{P}^T \\ \mathbb{P} & -\mathbb{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \lambda = \omega^2.$$

## Výběr dominantních módů

V praxi je snaha vyrábět rezonátory, u nichž vybraný mód kmitání bude mnohem snadněji vybuditelný než ostatní (tzv. dominantní mód), resp. u kterých budou dostatečné odstupy mezi

jednotlivými dominantními módy. Míru vybuditelnosti jednotlivých módů kmitů lze vyjádřit například pomocí jejich koeficientu elektromechanické vazby  $k$ , který je definován jako

$$k^2 = \frac{E_m^2}{E_{st}E_d},$$

kde

$$E_m = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \mathbf{P} \Phi), \quad E_{st} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}), \quad E_d = \frac{1}{2} (\Phi^T \mathbf{E} \Phi)$$

jsou vzájemná, elastická a dielektrická energie. Čím vyšší je hodnota koeficientu  $k$ , tím snadněji lze daný mód vybudit. Celkem snadno pak lze spočtené módy kmitů (řešením zobecněného problému vlastních čísel) roztrždit podle jejich významnosti.

# Numerické metody řešení algebraické úlohy

V této kapitole je popsána motivace použití algebraických metod založených na Krylovovských podprostorech a popsán implicitně restartovaný Arnoldiho algoritmus (IRA), který je využit pro řešení uvedeného zobecněného problému vlastních čísel.

## Krylovovské metody

Jsou dva možné přístupy k řešení problému vlastních čísel  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . V prvním případě můžeme řešit kompletní problém vlastních čísel (počítat celé spektrum), což obnáší transformaci originálního problému na jednodušší tvar, z něhož lze pak spektrum snadno získat (např. QR algoritmus, jehož výsledkem je Schurův rozklad matic). Tento postup je ovšem v praxi nepoužitelný pro velké problémy, především kvůli paměťovým nárokům.

Pokud nejsme nuceni zjišťovat všechna vlačíska matice, můžeme s úspěchem použít Krylovovské metody (detailní popis těchto metod i níže uvedeného IRA lze nalézt např. v [20] či [19]). Idea Krylovovských metod je v hledání aproximace vlastních vektorů jako prvku tzv. Krylovovského podprostoru  $\mathcal{K}_k(\mathbb{A}, \mathbf{v}) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbb{A}\mathbf{v}_1, \mathbb{A}^2\mathbf{v}_1, \dots, \mathbb{A}^{k-1}\mathbf{v}_1\}$ , tedy jako lineární kombinaci z vektorů generujících daný podprostor. Krylovovský podprostor obsahuje nejenom informaci o směru vlastního vektoru příslušejícímu maximálnímu vlastnímu číslu (jako to dělá mocninná metoda), ale vytváří i informace o vlastních vektorech v dalších směrech.

Hledaný vlastní vektor nelze v praxi vyjádřit přímo jako lineární kombinaci krylovovské sekvence, protože vektory z této posloupnosti se pro rostoucí index  $k$  stávají lineárně závislé. Ke konstrukci báze  $\mathcal{K}_k$ , která by byla ortonormální, slouží Arnoldiho faktorizace, algoritmus ortogonalizující krylovovskou sekvenci.

## Arnoldiho faktorizace

Arnoldiho algoritmus konstruuje ortonormální bázi  $\mathcal{K}_k$ ,  $\mathbb{V}_k = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathcal{R}^{n \times (k+1)}$ , dle schématu

$$\mathbb{A}\mathbb{V}_k = \mathbb{V}_k\mathbb{H}_k + \beta_k\mathbf{v}_{k+1}\mathbf{e}_k^T,$$

kde  $\mathbb{H}_k$  je matice v horním Hessenbergově tvaru a  $\mathbf{e}_k$  je jednotkový vektor.

Spektrum matice  $\mathbb{H}_k$  lze nalézt už snadněji (např. QR algoritmem). Máme-li vlastní pár  $(\lambda, \mathbf{s})$  matice  $\mathbb{H}_k$ , pak  $(\lambda, \mathbb{V}_k\mathbf{s})$  aproximuje vlastní pár matice  $\mathbb{A}$ . Pro zvyšující se  $k$  pak v ideálním případě konverguje k vlastnímu páru matice  $\mathbb{A}$ .

# Implicitně restartovaný Arnoldiho algoritmus

Obecně není známo, jak velké  $k$  je třeba k získání dobré aproximace. Jsme však zároveň omezeni paměťovými možnostmi (tj.  $k$  nemůže být příliš velké). Tento problém lze překlenout tzv. restartem Arnoldiho algoritmu (podrobněji popsáno ve vlastní práci nebo např. v [19]).

Máme-li  $n$ -dimensionální problém vlastních čísel a zajímá nás prvních  $k$  vlastních čísel, zvolíme nejprve  $m$  co největší tak, aby se nám vešla do paměti Arnoldiho faktorizace velikosti  $m$ . Opakovaně provádíme  $m$ -dimensionální Arnoldiho faktorizaci tak, že nový startovací vektor  $\mathbf{v}_1$  vzniká pomocí tzv. polynomiálního filtrování, kdy redukuje složky vektorů náležející směrům  $k + 1, \dots, m$ , a nový startovací vektor udržujeme v  $k$ -dimensionálním invariantním podprostoru, kam se postupně stlačují informace o hledaných vektorech. K tvorbě filtračního polynomu se použijí ta vlastní čísla matice  $\mathbb{H}_m$  z předchozího kroku, která náležejí směrům, jež chceme odstranit.

**Implicitní restart.** Je příliš náročné postupovat tak, že nejdříve aplikujeme filtrační polynom na tvorbu nového startovacího vektoru a poté dokončíme celou  $m$ -rozměrnou Arnoldiho faktorizaci. Implicitní restart umožňuje vyjádřit přímo Arnoldiho rozklad s novým startovacím vektorem pomocí předchozího rozkladu za použití implicitně posunutého QR algoritmu (podrobněji popsáno v práci).

## Zobecněný problém vlastních čísel

Výše uvedený IRA lze použít i pro zobecněný problém vlastních čísel  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{x}$ . Použijeme-li shift  $\kappa$  (slouží k posunutí se do části spektra, jež chceme počítat), pomocí tzv. zobecněné shift-and-invert transformace lze převést zobecněný problém vlastních čísel na obyčejný problém vlastních čísel,

$$\mathbb{C}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}, \text{ kde } \mathbb{C} = (\mathbb{A} - \kappa\mathbb{B})^{-1}\mathbb{B}, \quad \mu = (\lambda - \kappa)^{-1}.$$

V Arnoldiho algoritmu nyní přibude potřeba řešit v každém kroku soustavu rovnic s maticí  $(\mathbb{A} - \kappa\mathbb{B})$  a vzniklá báze je nyní  $\mathbb{B}$ -ortonormální.

## Poznámky - snaha o redukci velikosti algebraické úlohy

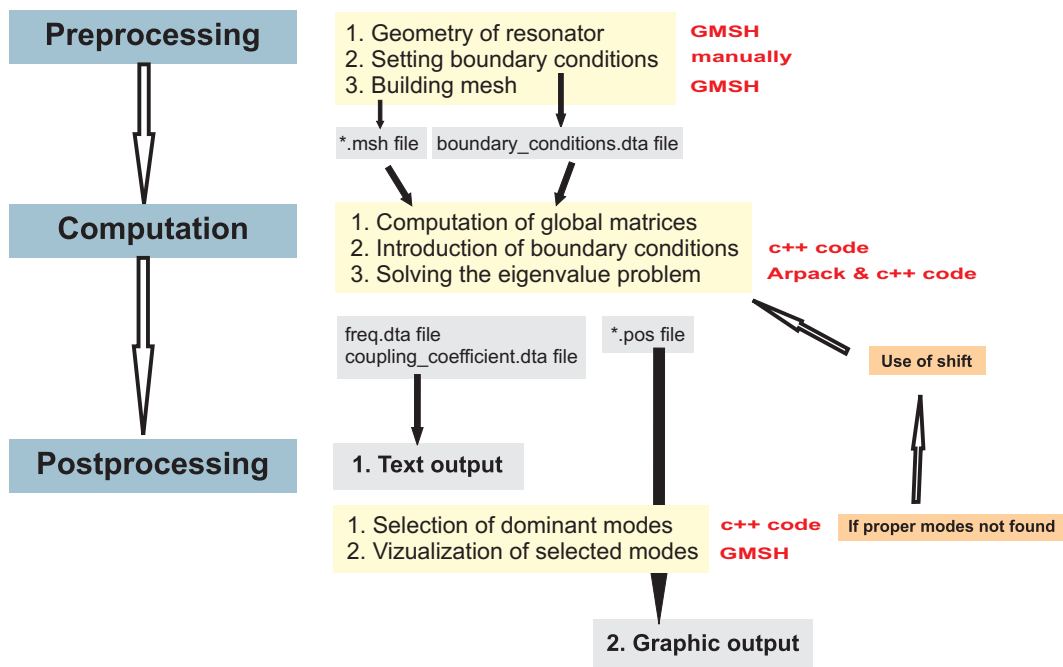
**Nutnost velkých matic** Motivací pro použití IRA bylo především snížení paměťových nároků. Originální algebraický problém totiž musí být obvykle velkých dimenzí, neboť jsme nuceni mít co nejmenější diskretizaci, abychom zajistili dobrou aproximaci slabého řešení. Navíc, ne každý mód kmitů lze zachytit libovolnou diskretizací. Matematický model se chová jako frekvenční filtr – v závislosti na jemnosti diskretizace je schopen postihnout jen módy určité složitosti. Pro módy komplikovaných tvarů je nutná velmi jemná síť, aby tento mód zachytila (není znám obecný postup, ale v praxi se doporučuje mít alespoň 3 prvky na jednu vlnovou délku daného kmitu).

**Redukce směrů.** V případě, že chceme najít kmitu v daném směru či rovině, lze snížit velikost algebraické úlohy a řešit úlohu redukovanou na zvolený směr či rovinu (při zachování informace o vzájemných 3D vazbách, podrobněji popsáno v práci). Např. pro kmitání v jednom směru lze redukovat rozměr úlohy na polovinu.



# Počítačová implementace modelu

Schéma realizace modelu znázorňuje obr. 1. V preprocessingové části je pro tvorbu geometrie



Obrázek 1: Schéma implementace modelu a jeho části.

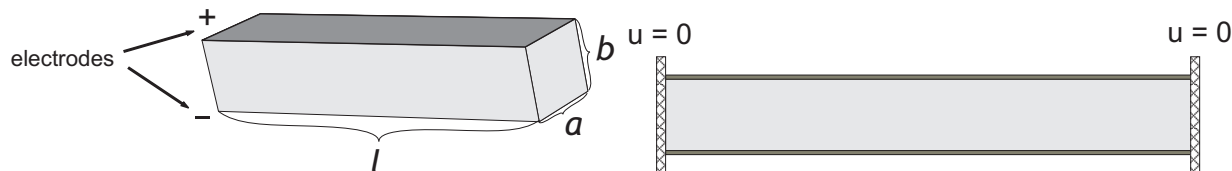
a sítě použit volně dostupný software GMSH [33]; ten také slouží k vizualizaci výsledků. Pro sestavení matic, zadání okrajových podmínek, identifikaci módů kmitů a selekci dominantních módů byl vytvořen původní programový modul v jazyce C++. Pro řešení zobecněného problému vlastních čísel je použit IRA v implementaci z volně dostupné knihovny ARPACK [28] v jazyce FORTRAN. Informace mezi jednotlivými moduly jsou předávány pomocí textových souborů (podrobnější popis implementace naleznete v práci).

# Testování modelu

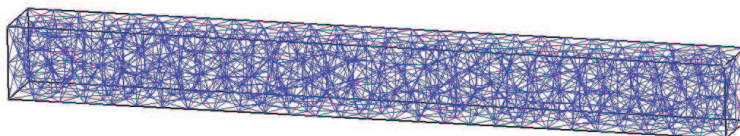
## Kmitání křemenné tyčinky

Testování kompletního modelu bylo provedeno na úloze kmitání křemenné tyčinky. Byly zvoleny podélné a torzní módy kmitání a výsledky byly porovnány s analytickým řešením.

**Geometrie a okrajové podmínky.** Geometrie, diskretizace a okrajové podmínky pro testovací úlohu jsou zobrazeny na obrázcích níže. Rozměry rezonátoru byly zvoleny  $l = 0.01$  m,  $a, b = 0.001$  m.



Obrázek 2: Piezoelektrická tyčinka s umístěním elektrod generujícím podélné a torzní kmity a předepsané okrajové podmínky.



Obrázek 3: Příklad diskretizace rezonátoru.

Výsledky modelu dokumentují dobrou shodu s analytickým řešením.

## Podélné kmity

Pro analytické vyjádření  $h$ -té rezonanční frekvence jsme použili vzorec [26]

$$f_h = \frac{h}{2l} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}}}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Tabulka ukazuje porovnání analytického a numerického řešení pro prvních 6 frekvencí.

analyticky spočtené frekvence    numericky spočtené frekvence    relativní odchylka(%)

$f_1 = 271803$ Hz	286205 Hz	+5.3
$f_2 = 543606$ Hz	572561 Hz	+5.3
$f_3 = 815409$ Hz	859212 Hz	+5.4
$f_4 = 1087212$ Hz	1146292 Hz	+5.4
$f_5 = 1359015$ Hz	1433952 Hz	+5.5
$f_6 = 1630818$ Hz	1722252 Hz	+5.6

Vizualizace výsledných kmitů je znázorněna na obrázku 4. Parametry výpočtu byly<sup>2</sup>:

Síť: počet uzlů = 4258, počet prvků = 21326

Matrice:  $\mathbb{A}$   $7476 \times 7476$ , 102446 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části,

$\mathbb{B}$  21326 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části

**Komentář výsledků.** Model prokázal dobrou shodu s analytickým řešením. Relativní odchylky kolem 5% mohou být způsobeny více faktory - model zahrnuje vazby v rezonátoru ve všech směrech, zatímco analytické řešení ne (uvažuje se jen koeficient  $s_{11}$ ). Dále je model citlivý na změnu vstupních materiálových parametrů. Při změně materiálových tenzorů v řádu procent se tato změna řádově promítne i do výsledků. Použité materiálové tenzory jsou uvedeny v práci.

## Torzní kmitý

Pro analytické vyjádření  $h$ -té rezonanční frekvence torzních kmitů byl použit vzorec [26]

$$f_h = \frac{h}{2l} \sqrt{\frac{G}{\varrho} \frac{2\frac{a}{b}}{\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2}}} \sqrt{1 - \frac{a}{b} \chi\left(\frac{a}{b}\right)}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

kde  $G = 40973043485.312064$  je efektivní torzní modul a hodnota funkce  $\chi\left(\frac{a}{b}\right) = 0.5777787$ . Srovnání analytického a numerického řešení je obsaženo v následující tabulce.

analyticky spočtené frekvence    numericky spočtené frekvence    relativní odchylka(%)

$f_1 = 180668$ Hz	171615 Hz	-5
$f_2 = 361336$ Hz	356761 Hz	-1.3
$f_3 = 542004$ Hz	532879 Hz	-1.7
$f_4 = 722672$ Hz	707107 Hz	-2.2
$f_5 = 903340$ Hz	853750 Hz	-5.5
$f_6 = 1084008$ Hz	1024242 Hz	-5.5
$f_7 = 1264676$ Hz	1189933 Hz	-6
$f_8 = 1445344$ Hz	1361634 Hz	-5.8
$f_9 = 1626012$ Hz	1627816 Hz	+0.1

Vizualizace kmitů je znázorněna na obrázku 5.

Parametry výpočtu byly<sup>3</sup>:

Síť: počet uzlů = 4258, počet prvků = 21326

Matrice:  $\mathbb{A}$   $8606 \times 8606$ , 223087 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části,

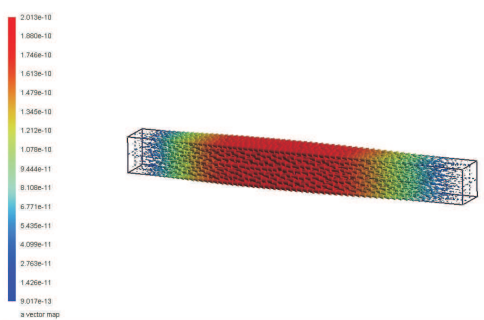
$\mathbb{B}$  49026 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části

<sup>2</sup>Byla použita redukce na směr osy  $x$ .

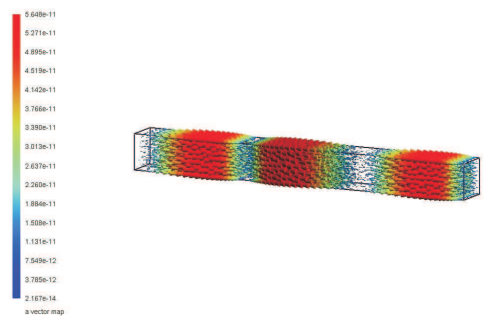
<sup>3</sup>Byl řešen kompletní 3D problém.

**Komentář výsledků.** Relativní odchylky mohou být způsobeny faktory popsány výše. Navíc algebraická úloha byla rozměrnější než v prvním případě, což s sebou může nést větší numerickou chybu. Nicméně, průměrná relativní odchylka je menší než v úloze podélných kmitů (tento fakt lze přičíst i tomu, že analytický vzorec již zahrnuje 2D vazbu - koeficienty  $s_{55}$  a  $s_{66}$  obsažené v modulu  $G$ ).

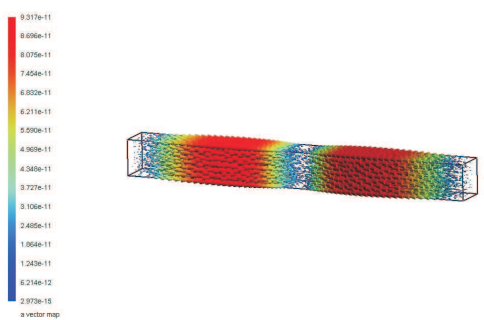
**0286205 Hz**



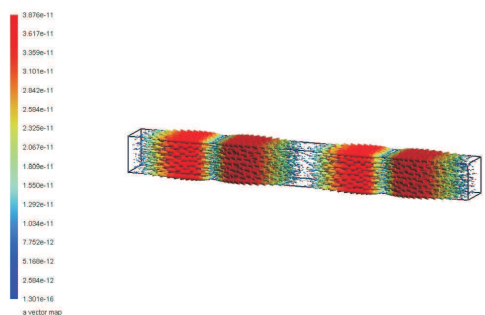
**0859212 Hz**



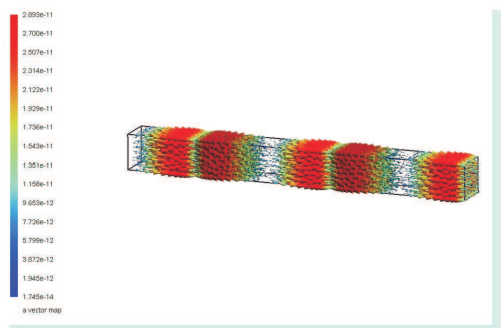
**0572561 Hz**



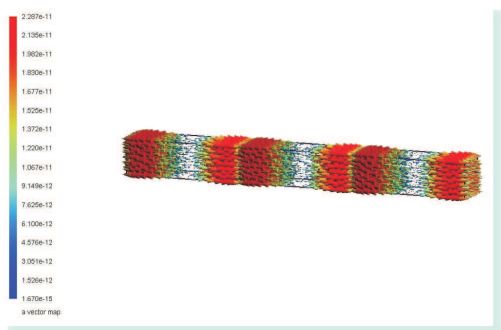
**1146292 Hz**



**1433952 Hz**

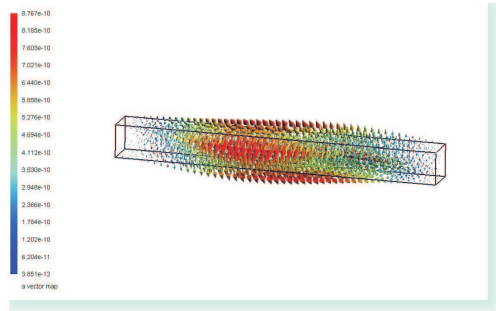


**1722252 Hz**

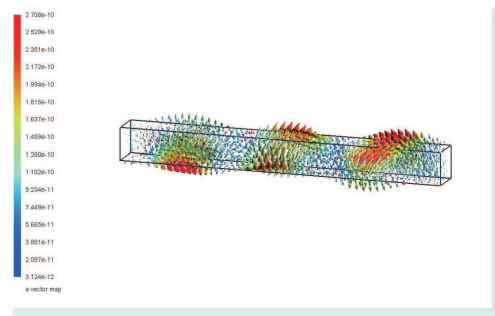


Obrázek 4: Prvních 6 podélných módů kmitů piezoelektrické tyčinky.

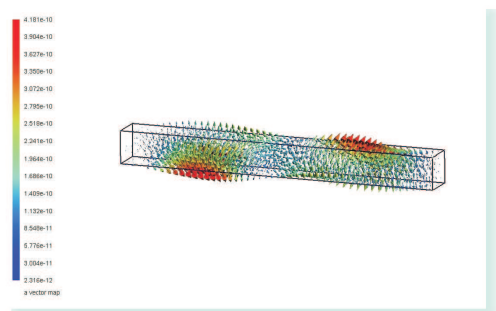
**0171615 Hz**



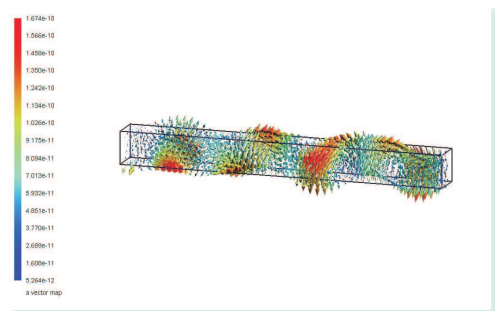
**0532879 Hz**



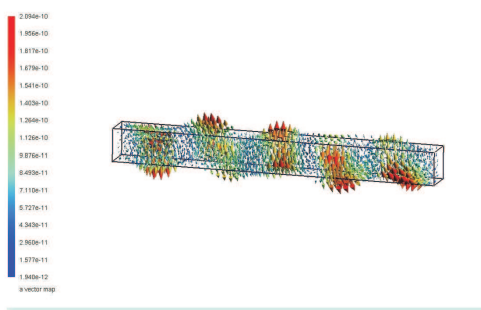
**0356761 Hz**



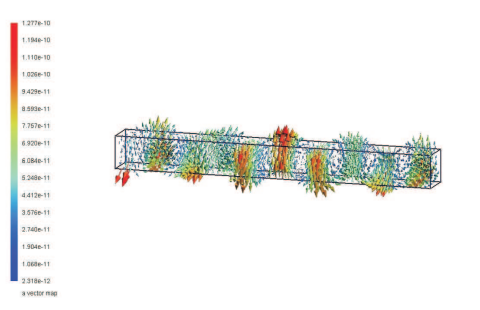
**0707107 Hz**



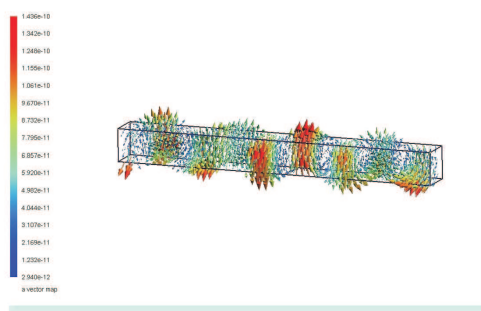
**0853750 Hz**



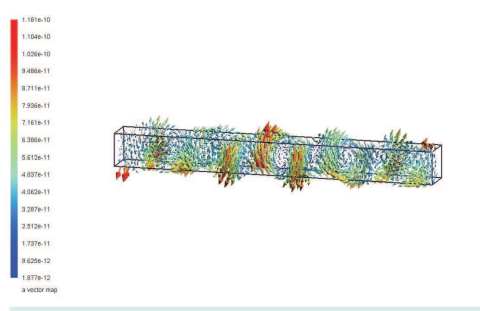
**1189933 Hz**



**1024242 Hz**



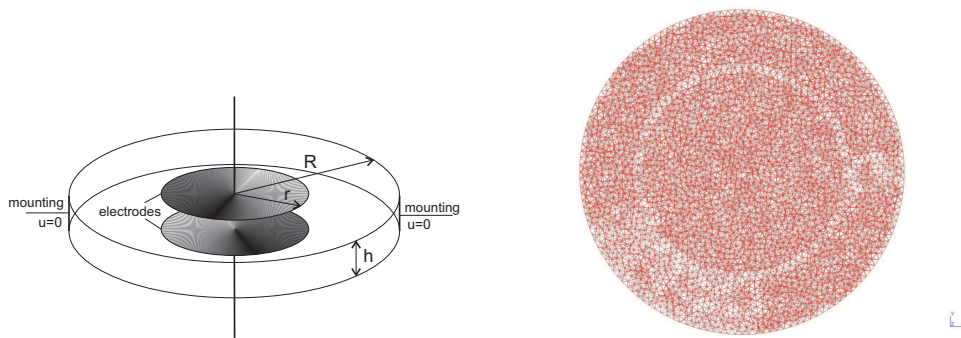
**1361634 Hz**



Obrázek 5: Prvních 8 torzních módů kmitů piezoelektrické tyčinky.

# Aplikace modelu na reálné úloze – kmitání planparalelního křemenného rezonátoru

Model byl aplikován na úloze nalezení dominantních módů kmitů tloušťkově strážně kmitajícího planparalelního křemenného rezonátoru ve směru osy  $x$  řezu krystalu. Tento rezonátor se průmyslově vyrábí v podniku Krystaly, a.s., Hradec Králové. Geometrie a ilustrační diskreti-



Obrázek 6: Popis planparalelního rezonátoru a ilustrativní síť.

zace rezonátoru jsou znázorněny na obr. 6. Jedná se o kruhovou destičku o poloměru  $R = 7$  mm se dvěma kruhovými elektrodami o poloměru  $r = 3.5$  mm umístěnými ve středu horní a spodní plochy rezonátoru. Rezonátor je upevněn na protilehlých stranách ve směru osy  $x$ . Tloušťka rezonátoru je  $h = 0.3355$  mm. Rezonátor je vyroben z křemenného krystalu řezu  $AT$   $35.25^\circ$ . Materiálové tenzory jsou uvedeny v práci.

Parametry výpočtu byly<sup>4</sup>:

Síť: počet uzlů = 7360, počet prvků = 31860

Matic:  $\mathbb{A}$   $9771 \times 9771$ , 100430 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části,

$\mathbb{B}$  47038 nenulových prvků v horní trojúhelníkové části

Výsledky experimentálního měření jsou převzaty z vývojového oddělení firmy Krystaly, a.s. Výstup z měření je znázorněn na obr. 8) se zvýrazněnými hodnotami rezonančních frekvencí.

## Výsledky a diskuze

Následující tabulka 1 obsahuje porovnání naměřených a spočtených hodnot pro první tři rezonanční frekvence hledaných módů kmitů. Průměrná odchylka numerických výsledků od naměřených hodnot činí asi 15%, ale relativní odstup jednotlivých dominantních módů jsou dobře

<sup>4</sup>Byla použita redukce na směr osy  $x$ .

rezonanční frekvence	naměřená (kHz)	spočtená (kHz)	relativní odchylka
1. ( $f_1$ )	4962	4210.843	15.1%
2.	$5067.5 = 1.02 f_1$	$4246.481 = 1.01 f_1$	16.2%
3.	$5102.5 = 1.03 f_1$	$4331.652 = 1.03 f_1$	14.7%

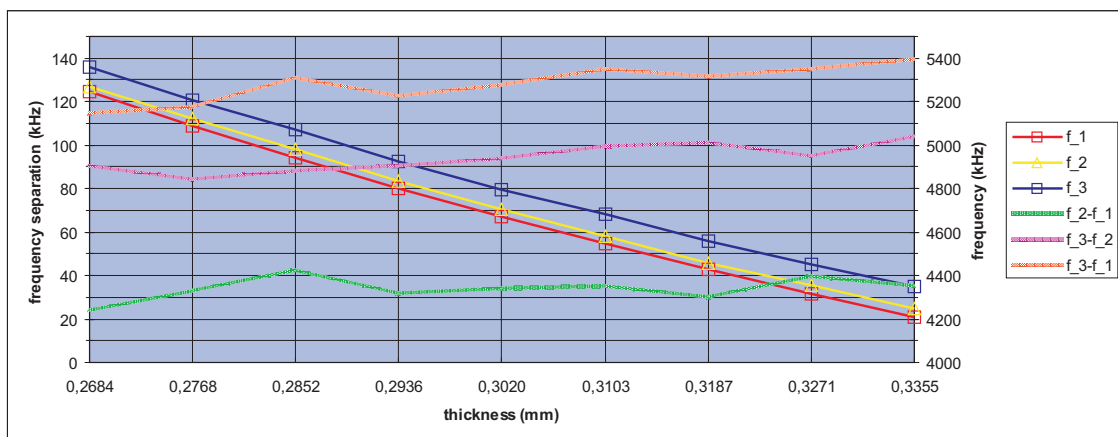
Tabulka 1: Srovnání naměřených a spočtených dominantních rezonančních frekvencí tloušťkově střižných kmitů.

zachovány. Při hledání důvodů této odchylky lze odkázat na diskuze k výsledkům u testovacích úloh - model je citlivý na vstupní materiálové a geometrické parametry, navíc se jedná o hledání módů kmitů nepoměrně složitějších než u testovacích úloh.

Byly nalezeny správné dominantní módy kmitů. Graf na obr. 9 ukazuje rozložení koeficientů elektromechanické vazby pro prvních 400 spočtených rezonančních frekvencí se zvýrazněním tří hledaných dominantních frekvencí. Obrázek ukazuje rozložení amplitud u spočtených módů kmitů a jejich porovnání s teoretickým stavem. Přes jisté nepřesnosti, zřejmě hlavně u třetího dominantního módu, lze jednotlivé módy jednoznačně identifikovat s jejich teoretickými protějšky.

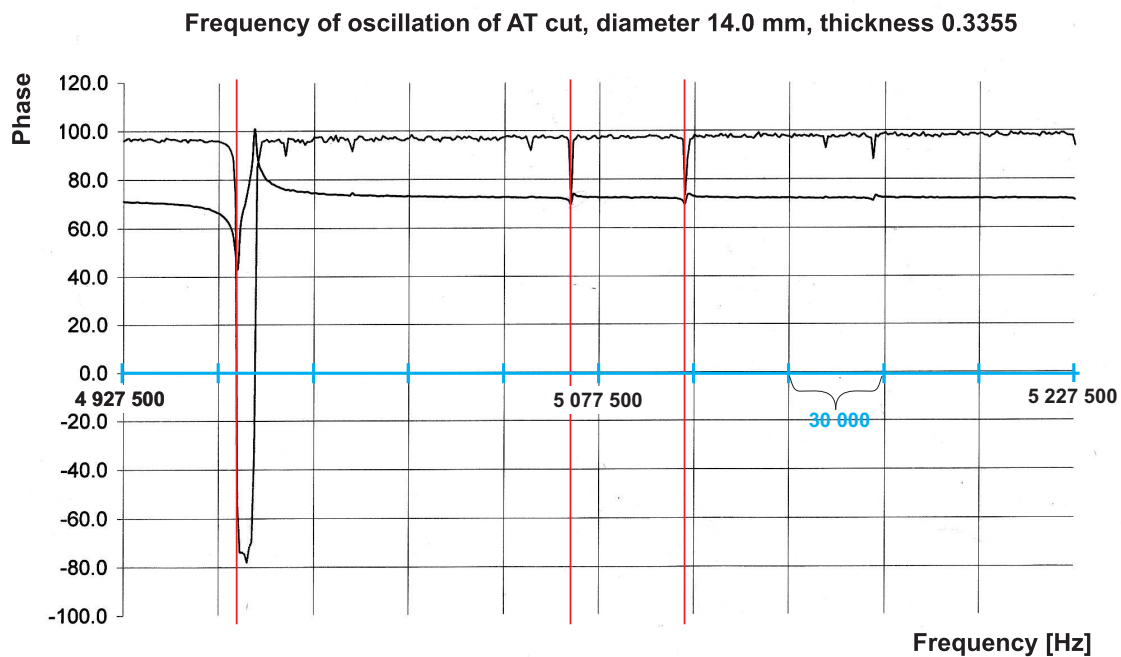
**Možné použití výsledků při procesu návrhu rezonátorů.** Model umožňuje sledovat chování rezonátoru v závislosti na změnách tvaru či umístění elektrod. Jako příklad, graf na obr. 7 ukazuje závislost dominantních rezonančních frekvencí a jejich vzájemného odstupu na změně tloušťky rezonátoru. Model dobře zachycuje lineární závislost rezonančních frekvencí na tloušťce.

Podobné výsledky mohou být použity v procesu návrhu rezonátorů, např. v optimalizačním procesu, kdy hledáme takový tvar a rozměry rezonátoru, pro které budou maximalizované odstupy jednotlivých dominantních frekvencí či odstupy dominantních frekvencí od ostatních frekvencí.

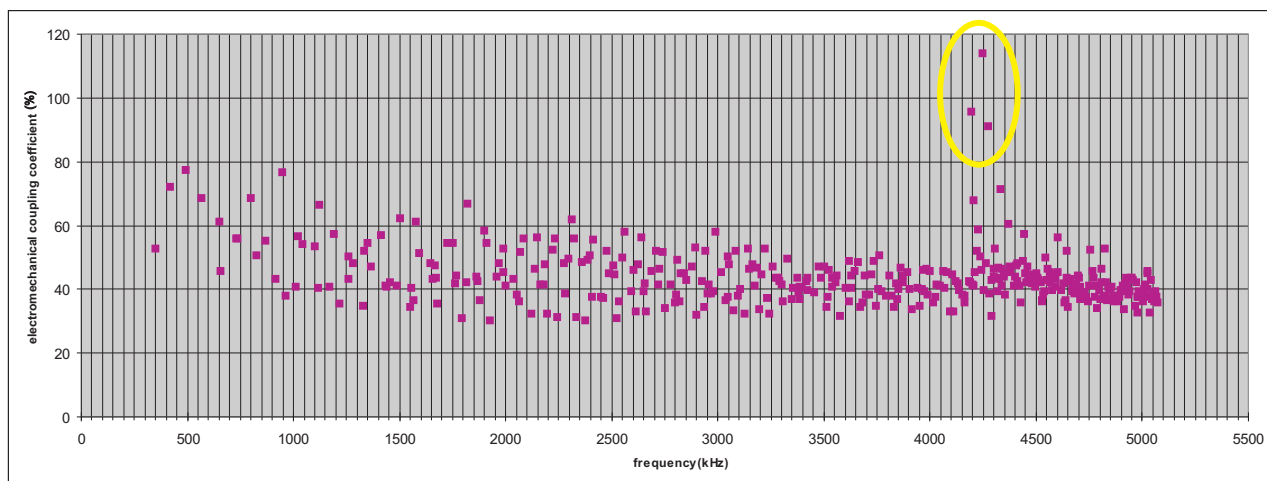


Obrázek 7: Graf závislosti dominantních rezonančních frekvencí a jejich odstupů na tloušťce rezonátoru.

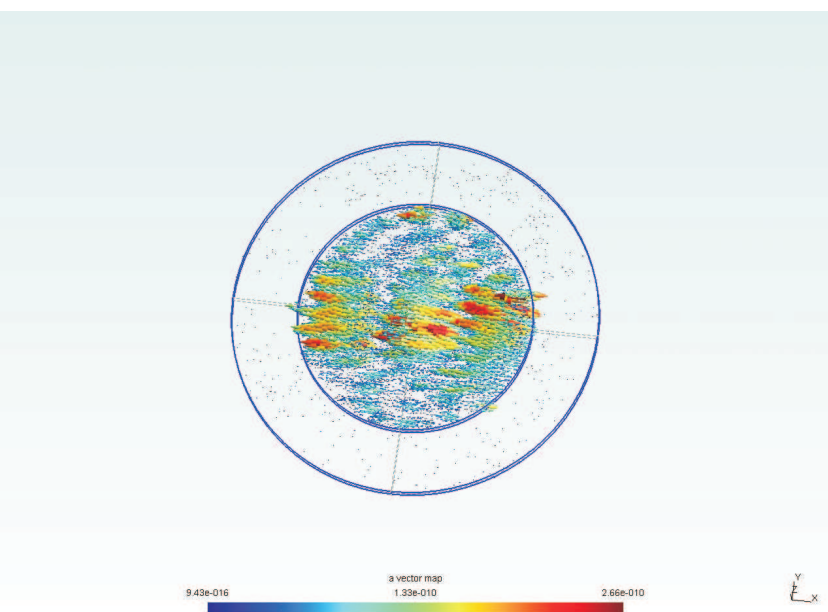
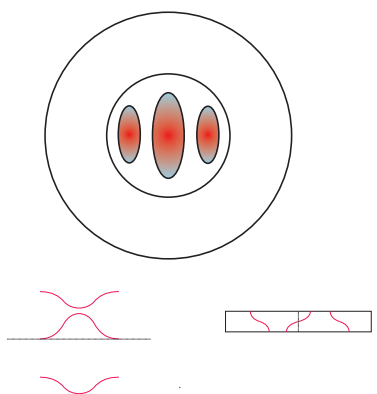
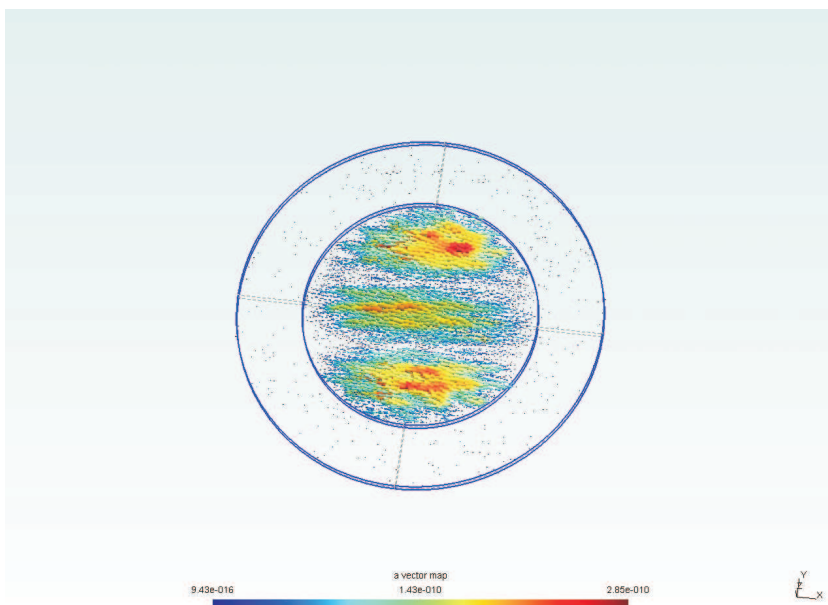
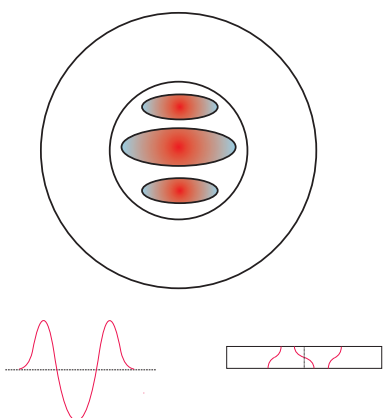
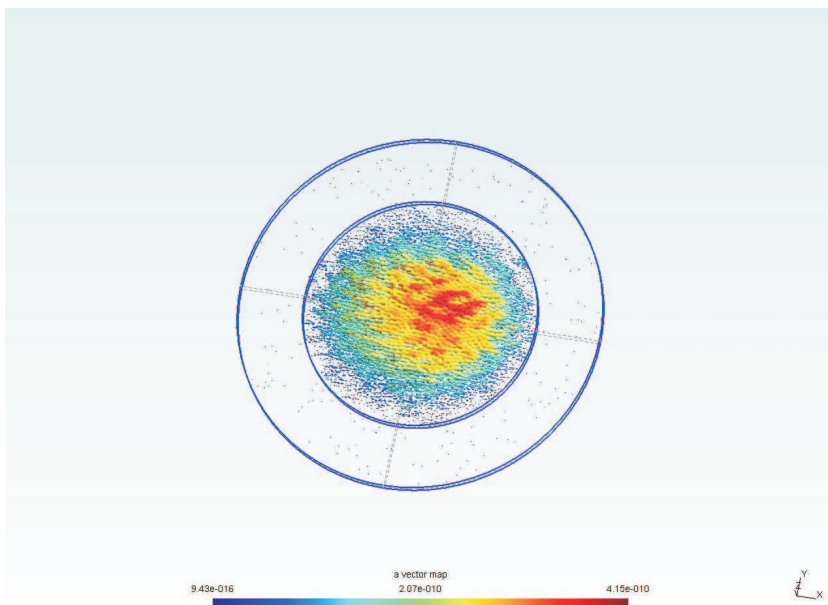
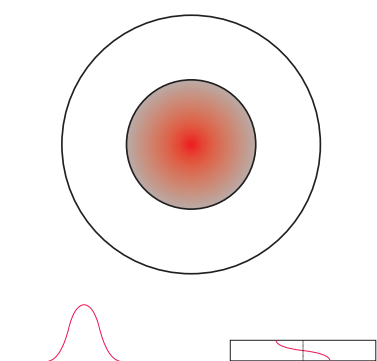




Obrázek 8: Dominantní rezonanční frekvence nalezené z měření.



Obrázek 9: Graf koeficientů elektromechanické vazby se zvýrazněním dominantních frekvencí.



Obrázek 10: Spočtené dominantní módy a srovnání s teoretickým rozložením amplitud.

# Závěr

Dizertační práce přináší výsledky modelování rezonančních charakteristik piezoelektrických rezonátorů. Diskretizace fyzikálního modelu, založená na metodě konečných prvků, vede na zobecněný problém vlastních čísel, jehož řešením lze získat rezonanční frekvence piezoelektrického rezonátoru. K řešení algebraické úlohy je použito Krylovovských metod, jmenovitě implicitně restartovaného Arnoldiho algoritmu. Počítačová implementace modelu je použitelná pro určování dominantních rezonančních frekvencí rezonátorů různých tvarů. Testovací úlohy prokázaly použitelnost modelu, přičemž vypočtené výsledky odpovídaly analytickému řešení. Model, aplikovaný na reálnou úlohu tloušťkově-střižných kmitů planparalelního křemenného rezonátoru, přináší kvalitativní shodu s měřením nalezením odpovídajících dominantních módů při zachování odpovídajících relativních odstupů jednotlivých frekvencí. Odchylka od měření (asi 15%) ukazuje na omezení modelu, ovšem po kalibraci na danou úlohu lze model prakticky používat. Citlivost modelu vyžaduje přesné zadání všech vstupních parametrů (zejména materiálových tenzorů - odchylka v zadání se řádově promítá do výsledků). Model vykazuje správnou odezvu na změnu vstupních parametrů (např. zachycuje lineární závislost rezonanční frekvence na tloušťce rezonátoru).

Je zde několik oblastí pro budoucí práci. Hlavní je vytvoření optimalizačního modulu, jenž by byl použitelný při procesu návrhu rezonátorů s požadovanými vlastnostmi. To bude vyžadovat několikrát opakování řešení algebraické úlohy. S touto úlohou může vyvstat požadavek na rychlejší počítačovou implementaci, např. pomocí paralelní implementace. Jak bylo zmíněno v práci, proti rychlosti výpočtu stojí také potřeba rozměrných úloh, pokud chceme vyjádřit složité módy kmitů. Možnou cestou k řešení rozměrnějších úloh, než dosud, je použití některé z implementací víceúrovňových metod pro řešení úlohy vlastních čísel (viz např. [2], [5] nebo [7]).

# Literatura

- [1] ALLIK H., HUGHES T. J. R., *Finite element method for piezoelectric vibration*, International journal for numerical methods in engineering, Vol. 2, pp. 151-157, 1970.
- [2] BENNIGHOF J.K., LEHOUCQ R.B., *An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics*, SIAM, Vol. 25, 2003.
- [3] BRENNER S.C., SCOTT L.R., *The mathematical theory of finite element methods* Springer-Verlag NY, 1994.
- [4] BREPTA R., PUST L., TUREK F., *Mechanické kmitání*, Technical Guide, Vol. 71, Sobotáles, Prague 1994.
- [5] CHAO YANG, *Solving large-scale eigenvalue problems in SciDAC applications*, Technical report, Lawrence Berkeley National Laboratory, 2005.
- [6] DULMET B., *Current trends of FEM applied to piezoelectric resonators*, ENSMM, L'institut FEMTO-ST, Besancon.
- [7] FIALKO S.Y., *An aggregation multilevel iterative solver with shift acceleration for eigenvalue analysis of large-scale structures*, CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics, Gliwice, 2003.
- [8] HWANG W.S., PARK H.CH., *Closed form expression for higher-order electroelastic tetrahedral elements*, AIAA Journal, Vol. 31, No. 5, 1993.
- [9] LEHOUCQ R., MASCHHOFF K., SORENSEN D., YANG CH.: *ARPACK USERS GUIDE, Solution of large scale eigenvalue problems by implicitly restarted Arnoldi methods*, 1997.
- [10] LERCH R., *Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectric and Frequency Control, Vol. 37, No. 2, 1990.
- [11] MÍKA S., KUFNER A., *Parciální diferenciální rovnice I*, SNTL Praha 1983.
- [12] MILSOM R. F., ELLIOT D. T., TERRY WOOD S., REDWOOD M., *Analysis and design of couple mode miniature bar resonator and monolithic filters*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectric and Frequency Control, Vol. 30, pp. 140- 155, 1983.
- [13] MOETAKEF M. A., LAWRENCE K.L., JOSHI S.P., SHIAKOLAS S., *Closed form expression for higher-order electroelastic tetrahedral elements*, AIAA Journal, Vol. 33, No. 1, 1995.
- [14] NEČAS J., HLAVÁČEK I., *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: An introduction*, 1. ed., Elsevier, Amsterdam 1981.

- [15] PIEFORT V., *Finite element modelling of piezoelectric active structures*, Ph.D. thesis, FAS ULB, 2001.
- [16] REKTORYS K., *Variční metody*, Academia Praha 1989.
- [17] SAMANTA B., RAY M.C., BHATTACHARYYA R., *Finite element model for active control of intelligent structures*, AIAA Journal, Vol. 34, No. 9, 1996.
- [18] SEMENČENKO V.K., *Izbrannye glavy teoretičeskoj fiziki*, Voennogo izdatelstvo Ministerstva oborony SSSR, Leningrad 1960.
- [19] SORENSEN D., *Implicitly restarted Arnoldi/Lanczos methods for large scale eigenvalue calculations, 1995*.
- [20] STEWART G. W., *Matrix algorithms*, University of Maryland, College Park 1999.
- [21] ŠTOLL I., TOLAR J., *Teoretická fyzika*, Czech Technical University, Prague 1981.
- [22] TIERSTEN H.F., *Linear piezoelectric plate vibrations: Elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations of piezoelectric plates*, Plenum Press, New York 1969.
- [23] TREFETHEN L. N., BAU D., *Numerical linear algebra*, Siam, Philadelphia 1997.
- [24] TZOU H. S., TSENG C. I., *Distributed modal identification and vibration control of continua: piezoelectric finite element formulation and analysis*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 113, pp. 500- 505, 1991.
- [25] WANG J., YONG Y.K., IMAI T., *Finite element analysis of the piezoelectric vibrations of quartz plate resonators with higher-order plate theory*, Proceedings of 1997 IEEE International frequency control symposium, Orlando 1997.
- [26] TICHÝ J., ZELENKA J., *Podélně a plošně strážně kmitající piezoelektrické rezonátory ze syntetického křemene*, Čs. Čas. Fys. 10, pp. 328 - 332, 1960.
- [27] ZELENKA J., *Piezoelektrické rezonátory a jejich použití v praxi*, Academia, Praha 1981.
- [28] LEHOUCQ R., MASCHHOFF K., SORENSEN D., YANG CH.,  
[www.caam.rice.edu/software/ARPACK/](http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/)
- [29] PAIGE C. C., SAUNDERS M. A.,  
<http://www.stanford.edu/group/SOL/software/symmlq.html>
- [30] MARQUES O., *SKYPACK User's Guide*,  
<http://crd.lbl.gov/~osni/#Software>
- [31] MARQUES O., <http://crd.lbl.gov/~osni/#Software>
- [32] <http://www.netlib.org/lapack>
- [33] <http://www.geuz.org/gmsh/>
- [34] <http://www.geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.htm>
- [35] <http://www.krystalaly.cz>

[36] <http://www.sensortech.ca>

**Vybrané publikace k tématu dizertace, napsané či participované autorem:**

- [37] RÁLEK P., *Modelování piezoelektrických jevů*, Diploma thesis, FJFI, Czech Technical University, Prague 2001.
- [38] MARYŠKA J., NOVÁK J., RÁLEK P., *Application of FEM in modelling of the resonance characteristics of piezoelectric resonators*, Proceedings of Algoritmy 2002, Slovakia, pp. 215-222, 2002.
- [39] MARYŠKA J., NOVÁK J., RÁLEK P., *Finite element model of piezoelectric resonator*, Current Trends in Scientific Computing, Contemporary Mathematics, Vol. 329, pp. 263-270, 2003.
- [40] MARYŠKA J., NOVÁK J., RÁLEK P., *Modelling of resonance characteristic of piezoelectric resonators - experimental experience*, Proc. 6th ECMS 2003, Liberec, pp.123-128, 2003.
- [41] MARYŠKA J., NOVÁK J., RÁLEK P., *FEM model of piezoelectric continuum and selected applications*, Proceedings of the IMAMM 2003, Rožnov p. R., 2004.
- [42] RÁLEK P., *Modelling of Piezoelectric Materials*, Proceedings of the IX. PhD. Conference ICS, AV ČR, 2004.
- [43] RÁLEK P., *Generalized eigenvalue problem in modelling of the piezoelectric resonators*, Proceedings of Seminar on numerical analysis SNA '05, Ostrava, 2005.
- [44] MARYŠKA J., NOVÁK J., RÁLEK P., *FEM modelling of the resonance frequencies of the planparallel quartz resonator*, Proceedings of ECMS 2005, Toulouse, 2005.