



**TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**  
Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

---

**Frekvenční spektrum  
podélně polarizovaných rezonátorů  
z piezoelektrické keramiky**

*Autoreferát disertační práce*

# **Frekvenční spektrum podélně polarizovaných rezonátorů z piezoelektrické keramiky**

Ing. Martin Pustka

Studijní program : P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor : 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště : katedra elektrotechniky

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Technická univerzita v Liberci

Hálkova 6, 461 17 Liberec 1

Školitel : Prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

Rozsah disertační práce a příloh

Počet stran: 91

Počet příloh: 3

Počet obrázků: 36

Počet tabulek: 5

Počet vzorců: 144

červenec 2005

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
1.1 Současný stav problematiky . . . . .	5
1.2 Cíle disertační práce . . . . .	6
<b>2 Elastické vlnění v piezoelektrických látkách</b>	<b>7</b>
<b>3 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických desek</b>	<b>8</b>
3.1 Dvourozměrné teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí .	10
<b>4 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických pásků</b>	<b>10</b>
4.1 Podélné kmity podélně polarizované tyčinky . . . . .	10
4.2 Jednorozměrný popis odvozený rozvojem do řady šířkové souřadnice . . . .	11
4.3 Jednorozměrný popis odvozený průměrováním přes tloušťkovou souřadnici .	14
<b>5 Frekvenční spektrum vázaných kmitů</b>	<b>16</b>
<b>6 Závěr</b>	<b>19</b>
<b>Literatura</b>	<b>21</b>
<b>Přehled publikovaných prací</b>	<b>22</b>
<b>Annotation</b>	<b>23</b>



# 1 Úvod

Piezoelektrické rezonátory jsou důležitým stavebním prvkem řady moderních zařízení. Vedle tradičních aplikací v oscilačních a filtračních elektrických obvodech nebo budičích akustického signálu nacházejí stále větší uplatnění jako rezonanční snímače neelektrických veličin, základní součást piezoelektrických aktuátorů a ultrazvukových motorů nebo v piezoelektrických transformátorech. Nově se objevují i technická řešení kombinující více rezonančních struktur s různou funkcí.

Pojmem piezoelektrický rezonátor rozumíme element z piezoelektricky aktivního materiálu (nejčastěji ve tvaru destičky, tyčinky nebo prstence), který je na vhodných plochách opatřen určitou konfigurací elektrod a kmitá některým vlastním módem kmitu. Mechanická deformace je vyvolána harmonickým elektrickým polem o frekvenci blízké některé vlastní frekvenci rezonátoru, přiloženým na elektrody. Rezonátor může obecně kmitat řadou jednoduchých nebo vzájemně vázaných módů kmitů různých řádů. V aplikacích se využívá obvykle pouze jediný mód, případně kombinace několika časově a prostorově posunutých módů kmitů.

Podstatou návrhu piezoelektrického rezonátoru je určení základních modálních parametrů - vlastní (rezonanční) frekvence a vlastního tvaru kmitu. U rezonátorů určených pro použití v radiotechnice nebo akustice je zásadní velikost a stabilita rezonanční frekvence a vzájemná vazba nebo odstup sousedních módů kmitů. U rezonátorů používaných pro aktuátory je určující také vlastní tvar kmitu, důležitý pro optimální činnost zařízení.

Rostoucí význam piezoelektrických rezonátorů v technické praxi klade nároky na přesnost jejich provedení. Nejdůležitější etapa návrhu spočívá v optimalizaci modálních parametrů piezoelektrického elementu podle požadavků budoucí aplikace. Hlavními faktory ovlivňujícími módy kmitů jsou tvar a rozměry rezonátoru a elektrod, použitý materiál a orientace krystalového řezu. Vhodnou kombinací těchto veličin je možné zvýraznit požadovaný mód kmitu a potlačit blízké nežádoucí módy. V průběhu konstrukce rezonátoru je nutné provést úplnou a přesnou analýzu spektra kmitů pro různé hodnoty geometrických a materiálových parametrů.

## 1.1 Současný stav problematiky

Obvyklým postupem používaným při návrhu piezoelektrického rezonátoru je analytické řešení pohybových rovnic, které vycházejí z aproximačních teorií vyšších řádů popisujících kmitu piezoelektrických desek [1]. Tato metodika je často doplněna matematickým modelováním pomocí metody konečných prvků.

Základ moderní teorie analytického řešení kmitů piezoelektrických rezonátorů tvoří Mindlinova dvourozměrná aproximační teorie popisující vlnění v elastických deskách [2]. Rozšíření původní Mindlinovy aproximace do oblasti kmitů piezoelektrických desek a jejímu dalšímu zpřesnění byla a je věnována velká řada publikací. Mezi nejvýznamější patří Tierstenova monografie [3] nebo souhrnná práce Zelenkova [1], z poslední doby pak zejména práce publikované Leem a jeho spolupracovníky [4], [5]. Většina aproximačních metod vychází z předpokladu lineárního popisu piezoelektrických kmitů a zanedbání vnitřních ztrát v rezonátoru. Přestože bylo publikováno množství prací popisujících nelineární elektroelastické rovnice nebo lineární rovnice respektující mechanické tlumení a elektrické ztráty, nebylo dosud formulováno podobné řešení pro kmitu rezonátorů konečných rozměrů.

Popis kmitů tenkých úzkých piezoelektrických destiček, označovaných také termínem *pásek* (strip), lze dále upravit zavedením jednorozměrné aproximace. Předpokládáme-li, že šířka a tloušťka pásku je malá ve srovnání s délkovým rozměrem, můžeme v obou těchto směrech nahradit skutečná rozložení veličin jejich průměrnou hodnotou nebo řadou diskrétních hodnot. Získáme tak jednorozměrné aproximované veličiny, které jsou funkcemi již pouze jedné souřadnice a času.

Řešením vázaných kmitů páskových rezonátorů s pravoúhlým průřezem pomocí jednorozměrné teorie se poprvé zabýval Lee [6]. Posunutí ve směru šířky rozvedl do mocninné řady šířkové souřadnice a hodnoty elastického napětí a posunutí ve směru tloušťky nahradil jejich středními hodnotami. Odlišný postup odvození jednorozměrných rovnic použili Lee a Wang v práci [7], kde veličiny ve směru tloušťkové i šířkové souřadnice rozvinuli do řady trigonometrických funkcí.

Vázanými kmity rezonátorů vyrobených z materiálu s hexagonální symetrií třídy  $6mm$  (např. piezoelektrická keramika) se zabývali například Zelenka [8] a Lee et al. [9]. V praxi jsou používána dvě provedení páskových rezonátorů s touto symetrií. První provedení má krystalografickou osu  $c$  (nebo směr polarizace v případě piezoelektrické keramiky) rovnoběžnou s délkou pásku a elektrody jsou umístěny na plochách kolmých k délce. V druhém případě je osa  $c$  rovnoběžná s tloušťkou a elektrody jsou na plochách kolmých k tloušťce.

Pro první případ stanovil Zelenka [8] úpravou vztahů [7] řešení vázaných podélných, šířkově rozpínavých a symetrických šířkově střížných kmitů pro případ ustálených kmitů rezonátoru bez elektrod. Lee et al. [9] se věnoval popisu kmitů druhého provedení rezonátoru. Podobně jako v [6] nahradil veličiny ve směru tloušťky jejich průměrnými hodnotami, přičemž šířkové veličiny rozvedl do řady trigonometrických funkcí. Tímto postupem získal rovnice vázaných podélných, šířkově rozpínavých a symetrických šířkově střížných kmitů.

## 1.2 Cíle disertační práce

Předložená práce se zabývá analytickým popisem vázaných kmitů podélně polarizovaných páskových rezonátorů z piezoelektrické keramiky (viz obr. 4.2, 4.4). Ucelené řešení tohoto problému, popisující reálný případ kmitů buzených harmonickým elektrickým polem, dosud nebylo publikováno.

Řešení navazuje na Zelenkovu práci [8]. V této publikaci není uvedeno odvození výsledných rovnic a neobsahuje ani ověření teoretických vztahů výpočtem a porovnáním s experimentem. Je proto vhodné vyjít z původních prací [4] a [7] a provést znovu úplné odvození těchto rovnic. Ty je pak nutné doplnit okrajovými podmínkami, které respektují způsob elektrického buzení kmitů rezonátoru.

Popis stejné skupiny vázaných kmitů lze získat také druhou metodou průměrování přes tloušťkovou souřadnici. Použitím stejné myšlenky jako v předchozím případě je možné přizpůsobit postup řešení [9] a získat vlnové rovnice kmitů podélně polarizovaných rezonátorů, které budou doplněny o příslušné okrajové podmínky. Opět je třeba vyjít z původní dvourozměrné aproximace [5].

Obě soustavy vlnových rovnic, získané různým postupem aproximace, by měly shodně popisovat chování reálného rezonátoru. Je proto nutné navzájem porovnat jejich řešení, například ve formě závislosti rezonanční frekvence na rozměrech rezonátoru. Důležité bude i porovnání teoretických výsledků s naměřenými hodnotami rezonančních frekvencí.

Je třeba si uvědomit, že podélně polarizované piezokeramické pásky představují specifické provedení rezonátoru. Vzhledem k jeho tvaru a způsobu buzení je činitel jakosti při rezonanci nízký. Značná délka spolu s malou plochou elektrod jsou příčinou velmi nízké statické kapacity a elektrické pole uvnitř rezonátoru je silně nehomogenní. Vlastnosti piezoelektrické keramiky jsou nelineární a její materiálové konstanty jsou výrobcem zaručovány v toleranci několika procent [10]. Některé teoreticky popsateľné módy kmitů nelze vybudit, nebo je nutné použít vyšší nelineární úrovně budicího napětí. Získané rovnice proto budou zřejmě pouze lineární aproximací reálného nelineárního stavu.

## 2 Elastické vlnění v piezoelektrických látkách

Popis vázaných kmitů piezoelektrických rezonátorů souvisí s problémem šíření elastického vlnění v piezoelektrickém ohraničeném prostředí.

V neohraničeném prostředí se obecně šíří vlnění složené ze tří rovinných elastických vln, jejichž polarizace jsou navzájem kolmé. Vlivem vzájemné závislosti mechanických a elektrických veličin dochází k vazbě mezi elastickým a elektromagnetickým vlněním. Za předpokladu nekonečně malých deformací a kvazistatického charakteru elektrického pole můžeme vlnění v piezoelektrických látkách popsat následující skupinou rovnic [3]:

a) algebraické rovnice (lineární piezoelektrické rovnice)

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

b) divergenční rovnice (elastické pohybové rovnice a nábojová rovnice elektrostatiky)

$$\begin{aligned} T_{ij,i} &= \rho \ddot{u}_j, \\ D_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

c) gradientní rovnice (vztahy mezi deformací a mechanickým posunutím a mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem)

$$\begin{aligned} S_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \\ E_k &= -\varphi_{,k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $T_{ij}$ ,  $S_{kl}$ ,  $E_k$  a  $D_i$  jsou po řadě složky elastického napětí, deformace, intenzity elektrického pole a elektrického posunutí,  $u_j$  a  $\varphi$  jsou složky mechanického posunutí a elektrický potenciál. Materiálovými vlastnostmi látky jsou elastický modul při konstantní intenzitě elektrického pole  $c_{ijkl}^E$ , piezoelektrický modul  $e_{ikl}$ , permitivita při konstantní deformaci  $\varepsilon_{ik}^S$  a hustota  $\rho$ .

Systém 22 rovnic (2.1) až (2.3) pro 22 neznámých lze postupným vzájemným dosazováním zjednodušit na soustavu čtyř diferenciálních rovnic pro čtyři neznámé  $u_j$  a  $\varphi$

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^E u_{k,li} + e_{kij} \varphi_{,ki} &= \rho \ddot{u}_j, \\ e_{ikl} u_{k,li} - \varepsilon_{ik}^S \varphi_{,ki} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Při vlnění v ohraničeném piezoelektrickém prostředí, tedy s jednou a více hraničními plochami, dochází na rozhraní k odrazům vlnění a vazbě různých módů kmitů. Rovnice (2.4) musíme řešit současně s okrajovými podmínkami, které jsou dvojího druhu -

- mechanické a elektrické. Při návrhu obvykle předpokládáme rezonátor s mechanicky volnými plochami umístěný ve vakuu. Složky elastického napětí na hraniční ploše  $x_i = \text{konst.}$  jsou nulové a mechanická okrajová podmínka má tvar

$$T_{i1} = T_{i2} = T_{i3} = 0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst.} \quad (2.5)$$

Povrch rezonátoru je buď bez elektrod, nebo pokrytý dokonale vodivými nehmotnými elektrodami, na které je přiložen elektrický potenciál. V prvním případě má při zanedbání elektrické pole ve vakuu elektrická okrajová podmínka tvar

$$D_i = 0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst.} \quad (2.6a)$$

U pokoveného povrchu vyžadujeme spojitý potenciál na celé ploše elektrody

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst.}, \quad (2.6b)$$

kde hodnota přiloženého potenciálu  $\varphi_0$  může být nulová, nebo může nabývat konečných hodnot.

Elastické vlnění postupující nekonečnou piezoelektrickou deskou si můžeme představit jako soubor mnoha složek, které se šíří ve směru kolmém na tloušťku desky střídavým odražením od jejích hraničních rovin. Tyto složky mají charakter podélné nebo příčné vlny a představují *módy kmitů* (*kmity*) nekonečně rozlehlé desky. Prostor omezený dvěma hraničními rovinami se chová jako vlnovod, ve kterém dochází k disperzi vlnění [11]. Rychlost vlny ve směru šíření vlnění není konstantní a závisí na její frekvenci.

V prostorově ohraničené desce je šíření vlnění omezeno dalšími hranicemi na okrajích desky. Při odrazech na hranicích desky vznikají třírozměrné stojaté vlny, jejichž kmitání je popsáno vlnovými rovnicemi (2.4). Jejich řešení musí vyhovovat mechanickým a elektrickým okrajovým podmínkám (2.5), (2.6) na všech hraničních plochách rezonátoru. Řešení této soustavy lze analyticky vyjádřit v uzavřeném tvaru konečného počtu matematických funkcí pouze pro případ nekonečných desek nebo pro ohraničené desky se specifickými poměry rozměrů. Pro popis kmitů deskového rezonátoru obecných rozměrů je proto nutné použít některou z aproximačních metod.

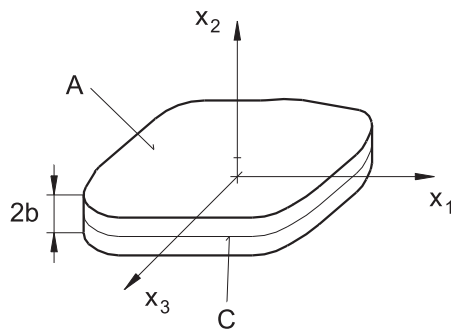
### 3 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických desek

Uvažujme ohraničenou piezoelektrickou desku obecného tvaru, umístěnou v souřadné soustavě tak, že její tloušťka  $2b$  je rovnoběžná s osou  $x_2$  a počátek souřadné soustavy leží ve střední rovině desky (viz obr. 3.1). Pro případ buzení kmitů ve směru kolmém na osu  $x_2$  předpokládáme plochy bez elektrod.

K vyjádření diferenciálních rovnic popisujících pohyb piezoelektrického tělesa o objemu  $V$  uzavřeném plochou  $S$  můžeme využít variačního principu pro lineární piezoelektrické kontinuum [3], který je modifikací principu virtuálních prací analytické mechaniky. Variační rovnice vyjadřují dynamickou rovnováhu systému a mají tvar

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V [(T_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j + D_{i,i} \delta \varphi] dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S [(t_j - n_i T_{ij}) \delta u_j + (\sigma - n_i D_i) \delta \varphi] dS = 0, \quad (3.1)$$





Obr. 3.1: Ohraničená piezoelektrická deska umístěná v souřadném systému

kde  $t_j$  je elastické napětí na povrchu elementu,  $\sigma$  je hustota povrchového náboje a  $n_i$  je jednotkový vektor směřující vně plochy  $S$ .  $\delta u_j$  a  $\delta\varphi$  jsou libovolné variace posunutí a potenciálu, které jsou v časech  $t_0$  a  $t_1$  nulové.

Základní myšlenka aproximačního popisu spočívá v nahrazení skutečného rozložení veličin ve směru tloušťky desky nekonečnou řadou matematických funkcí  $G_n(x_2)$  [2]. Mechanické posunutí  $u_j$  a potenciál  $\varphi$  rozvineme do nekonečné řady

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} G_n(x_2), \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} G_n(x_2), \quad (3.2)$$

kde

$$u_j^{(n)} = u_j^{(n)}(x_1, x_3, t), \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_1, x_3, t) \quad (3.3)$$

jsou dvourozměrné složky posunutí a potenciálu závislé pouze na souřadnicích  $x_1, x_3$  a čase  $t$ . Horní index v závorce nevyjadřuje mocninu, ale pouze určuje řád složky. Člen

$$u_j^{(n)}(x_1, x_3, t) G_n(x_2) \quad (3.4)$$

určuje tvar kmitu  $n$ -tého řádu. Vzhledem k symetrii vůči střední rovině desky  $x_1x_3$  přispívají složky posunutí  $u_j^{(n)}$  k roztažným kmitům desky pro  $(j+n)$  liché a k ohybovým kmitům desky pro  $(j+n)$  sudé.

Postup odvození aproximačních rovnic spočívá v dosazení nekonečných rozvoje posunutí a potenciálu (3.2) do objemové části rovnice vyjadřující variační princip (3.1). Úpravou získáme dvourozměrné aproximační rovnice, které nahrazují soustavu třírozměrných rovnic (2.1)–(2.4). Pro praktické použití je nutné omezit nekonečný rozvoj na členy řádu  $n \leq N$ , tedy provést aproximaci  $N$ -tého řádu. Dále je třeba porovnat řešení těchto rovnic s přesným řešením třírozměrných rovnic (2.4), prokázat ortogonalitu řešení a definovat okrajové podmínky. Ty získáme dosazením rozvoje (3.2) do plošné části variační rovnice (3.1).

Výsledné dvourozměrné aproximační rovnice  $N$ -tého řádu spolu s okrajovými podmínkami představují úplnou soustavu popisující vázané kmity deskového rezonátoru v určitém frekvenčním rozsahu. Řešení soustavy je možné vyjádřit v uzavřeném tvaru konečného počtu analytických funkcí.

### 3.1 Dvourozměrné teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí

Lee [4] použil při odvození dvourozměrných aproximačních rovnic rozvoje do řady trigonometrických funkcí. Mechanické posunutí  $u_j$  a elektrický potenciál  $\varphi$  rozvinul do nekonečné řady

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} \cos \left[ \frac{n\pi}{2}(1 - \eta) \right], \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} \cos \left[ \frac{n\pi}{2}(1 - \eta) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde  $\eta = x_2/b$ . V práci [5] je tato dvourozměrná teorie dále zpřesněna zahrnutím členu  $u_{2,j}^{(0)} x_2$ , který představuje antisymetrické posunutí odpovídající ohybové deformaci desky, které je lineární funkcí tloušťkové souřadnice  $x_2$ . Rozvoj (3.5) je nyní nahrazen vztahy

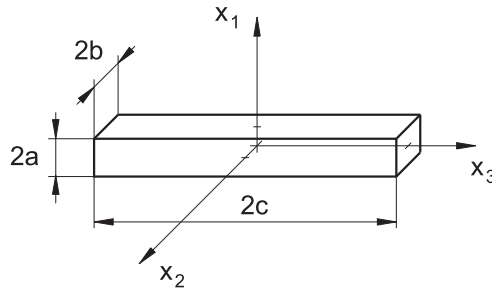
$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= -u_{2,j}^{(0)} x_2 + \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} \cos \left[ \frac{n\pi}{2}(1 - \eta) \right], \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} \cos \left[ \frac{n\pi}{2}(1 - \eta) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

## 4 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických pásků

Aproximační rovnice popisující vázané kmity podélně polarizovaných páskových rezonátorů odvodíme z dvourozměrných aproximačních rovnic pro piezoelektrickou desku, které získáme použitím rozvoje (3.5) nebo (3.6). Při sestavování rovnic předpokládáme, že polarizovaný element z piezoelektrické keramiky má symetrii  $\infty mm$  a jeho polární osa je shodná s osou  $x_3$ . Vlastnosti piezoelektrické keramiky lze popsat elasto-piezo-dielektrickou maticí odpovídající třídě  $6mm$ .

### 4.1 Podélné kmity podélně polarizované tyčinky

Jako mezní případ rezonátoru ve tvaru pásku nejdříve uvažujeme tenkou dlouhou tyčinku polarizovanou ve směru její délky  $2c$  (obr. 4.1), jejíž příčné rozměry jsou velmi malé v porovnání s délkou ( $a, b \ll c$ ). Kmity předpokládáme za čistě podélné, závisující pouze na souřadnici  $x_3$  [12].



Obr. 4.1: Tenká dlouhá tyčinka umístěná v souřadném systému

Kmity tyčinky jsou popsány vlnovou rovnicí

$$\frac{1}{s_{33}^E(1 - (k_{33})^2)} u_{3,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (4.1)$$

kde  $k_{33}$  je koeficient elektromechanické vazby

$$(k_{33})^2 = \frac{(d_{33})^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}, \quad (4.2)$$

$d_{33}$  je piezoelektrický koeficient,  $s_{33}^E$  je elastický koeficient při konstantním elektrickém poli a  $\varepsilon_{33}^T$  je permitivita při konstantním elastickém napětí. V případě elektricky buzených kmitů předpokládáme jako řešení vlnové rovnice lineární kombinaci antisymetrických stojatých vln

$$u_3(x_3, t) = \sum_h A_h \sin(\xi_h x_3) e^{j\omega t}, \quad (4.3)$$

kde  $\xi_h$  je vlnové číslo pro  $h$ -tý řád kmitu a  $A_h$  je amplituda. Symetrická řešení ve tvaru  $\cos(\xi_h x_3)$  neuvažujeme, protože nevyhovují okrajovým podmínkám a symetrické podélné kmity nelze elektricky vybudit. Po dosazení získáme vztah pro rezonanční frekvenci podélných kmitů tyčinky

$$f_h = \frac{\xi_h}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E(1 - (k_{33})^2)}}. \quad (4.4)$$

Zavedením okrajových podmínek na konci tyčinky

$$T_3 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 e^{j\omega t} \quad \text{pro } x_3 = \pm c \quad (4.5)$$

obdržíme transcendentní rovnici, ze které můžeme vypočítat odpovídající vlnové číslo  $\xi_h$

$$\text{tg}(\xi_h c) = \frac{\xi_h c}{(k_{33})^2}. \quad (4.6)$$

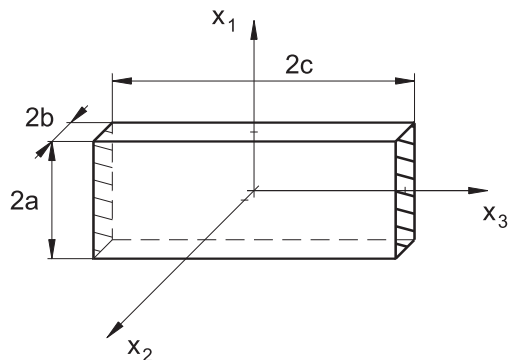
## 4.2 Jednorozměrný popis odvozený rozvojem do řady šířkové souřadnice

Uvažujme páskový rezonátor o šířce  $2a$ , tloušťce  $2b$  a délce  $2c$ , orientovaný v souřadném systému podle obr. 4.2.

Posunutí a elektrický potenciál ve směru tloušťky rozvineme do řady funkcí podle (3.5). Námi odvozená aproximace popisuje kmity o frekvenci nižší než je mezní frekvence nejnižšího prostého tloušťkového kmitu ve směru tloušťky pásku. Za tohoto předpokladu provedeme aproximaci 0. řádu a nahradíme posunutí a potenciál ve směru tloušťky rovnoměrným rozložením  $u_i^{(0)}$  a  $\varphi^{(0)}$ . Tyto veličiny dále rozvineme ve směru šířky do řady trigonometrických funkcí

$$u_i^{(0)}(x_1, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_i^{(0r)}(x_3, t) \cos\left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1)\right], \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

$$\varphi^{(0)}(x_1, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi^{(0r)}(x_3, t) \cos\left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1)\right],$$



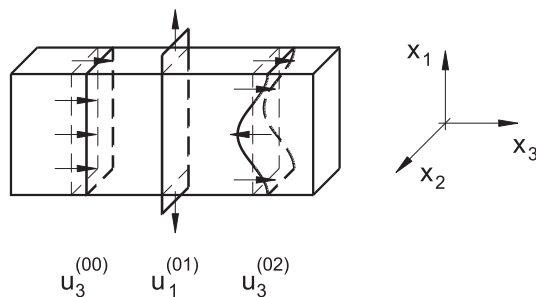
Obr. 4.2: Páskový rezonátor umístěný v souřadném systému

kde  $\eta_1 = x_1/a$ . Veličiny  $u_i^{(0r)}$ ,  $\varphi^{(0r)}$  představují jednorozměrnou aproximaci třírozměrných posunutí a potenciálu, které mají své rozložení ve směru tloušťky aproximováno rovnoměrným módem 0. řádu, ve směru šířky pak trigonometrickou funkcí  $r$ -tého řádu a jsou funkcí pouze souřadnice  $x_3$  a času. Nekonečnou řadu omezíme na členy  $r \leq 2$ .

Postupným odvozením získáme jednorozměrné aproximační rovnice, popisující vázané podélné kmity  $u_3^{(00)}$ , šířkově rozpínavé kmity  $u_1^{(01)}$  a šířkově střížné kmity druhého řádu  $u_3^{(02)}$ , které mohou být vybudeny potenciálem přiloženým na elektrody na koncích pásku

$$\begin{aligned}
 c_{33}^* u_{3,33}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} c_{13}^* u_{1,3}^{(01)} &= \rho \ddot{u}_3^{(00)}, \\
 c_{55} u_{1,33}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \bar{c}_{11} u_1^{(01)} - \frac{2\pi}{\sqrt{8a}} \bar{c}_{13} u_{3,3}^{(00)} + \\
 &+ \frac{2}{3a} (\bar{c}_{13} + 4c_{55}) u_{3,3}^{(02)} + \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} \varphi_{,3}^{(02)} = \rho \ddot{u}_1^{(01)}, \quad (4.8) \\
 \bar{c}_{33} u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a} (\bar{c}_{13} + 4c_{55}) u_{1,3}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 c_{55} u_3^{(02)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,33}^{(02)} &= \rho \ddot{u}_3^{(02)}, \\
 \bar{e}_{33} u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} u_{1,3}^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,33}^{(02)} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \varepsilon_{11} \varphi^{(02)} &= 0,
 \end{aligned}$$

kde  $\bar{c}_{\lambda\mu}$ ,  $c_{\lambda\mu}^*$ ,  $\bar{e}_{i\lambda}$  a  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  jsou modifikované složky materiálových konstant. Vlastní tvary těchto kmitů jsou znázorněny na obr. 4.3.



Obr. 4.3: Podélné  $u_3^{(00)}$ , šířkově rozpínavé  $u_1^{(01)}$  a symetrické šířkově střížné kmity  $u_3^{(02)}$

V případě roztažných kmitů předpokládejme řešení rovnic (4.8) ve tvaru

$$\begin{aligned}
u_3^{(00)} &= \sum_{n=1}^4 A_{1n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
u_1^{(01)} &= \sum_{n=1}^4 A_{2n} \cos(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
u_3^{(02)} &= \sum_{n=1}^4 A_{3n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
\varphi^{(02)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\bar{\epsilon}_{33}}} \sum_{n=1}^4 A_{4n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pro zjednodušení výpočtu je obvyklé vyjadřovat vlnové číslo a frekvenci ve tvaru poměrných hodnot

$$\bar{\xi} = \xi \frac{2b}{\pi}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}}. \tag{4.10}$$

Dosazením řešení (4.9) do vlnových rovnic (4.8) a použitím vztahů (4.10) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \\ D_{3n} \\ D_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.11}$$

Soustava (4.11) má netriviální řešení pro nenulová  $A_{in}$ , pokud je determinant matice koeficientů  $\mathbf{D}$  nulový. Tuto disperzní závislost obvykle zapisujeme symbolicky ve tvaru

$$D \left( \Omega, \frac{b}{a}, \bar{\xi} \right) = 0. \tag{4.12}$$

Řešením rovnice (4.12) jsou čtyři vlnová čísla  $\bar{\xi}_n$ , která musí dále vyhovovat okrajovým podmínkám na koncích pásku  $x_3 = \pm c$ . Pro mechanicky volný pásek s elektrodami, na které je přiložen elektrický potenciál, uvažujeme podmínky ve tvaru

$$\begin{aligned}
T_3^{(00)} &= 4 \left( c_{33}^* u_{3,3}^{(00)} - \frac{1}{c} \frac{(\bar{\epsilon}_{33})^2}{\bar{\epsilon}_{33}} u_3^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} \right) = -4\bar{\epsilon}_{33} \frac{\varphi_0}{c}, \\
T_5^{(01)} &= 2c_{55} \left( u_{1,3}^{(01)} + \frac{8}{3c} u_3^{(02)} \right) = 0, \\
T_3^{(02)} &= 2 \left( \bar{c}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{\epsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0, \\
D_3^{(02)} &= 2 \left( \bar{\epsilon}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{\epsilon}_{31} u_1^{(01)} - \bar{\epsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

kde  $T_\lambda^{(0n)}$  a  $D_i^{(0n)}$  jsou složky jednorozměrného elastického napětí a elektrického posunutí.

Po dosazení řešení (4.9) do okrajových podmínek (4.13) a úpravě získáme nehomogenní soustavu lineárních rovnic pro čtyři neznámé amplitudy  $A_{3i}$

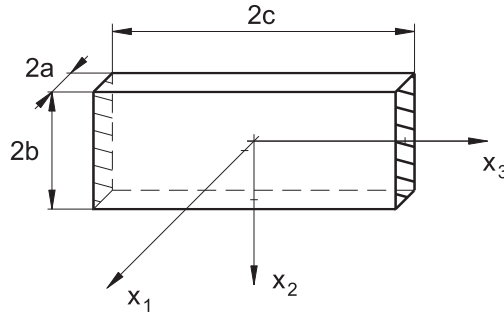
$$\begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ M_{3n} \\ M_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{e}_{33}}{c_{44}} \frac{2b}{\pi c} \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

V případě rezonance musí být determinant matice koeficientů  $\mathbf{M}$  nulový a tuto závislost opět vyjadřujeme symbolicky jako

$$M\left(\Omega, \frac{c}{b}\right) = 0. \quad (4.15)$$

### 4.3 Jednorozměrný popis odvozený průměrováním přes tloušťkovou souřadnici

Nyní uvažujme páskový rezonátor o šířce  $2b$ , tloušťce  $2a$  a délce  $2c$ , orientovaný v souřadném systému podle obr. 4.4.



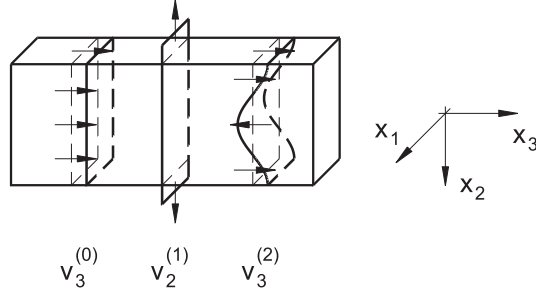
Obr. 4.4: Páskový rezonátor umístěný v souřadném systému

Posunutí a elektrický potenciál ve směru šířky rozvineme do řady funkcí podle (3.6) a získáme aproximační rovnice 2. řádu. Veličiny ve směru tloušťky pak nahradíme jejich středními hodnotami a převedeme řešení původně prostorového problému na problém rovinné napjatosti v rovině  $x_2x_3$ , kde kmity závisí pouze na souřadnici  $x_3$  a ve směru  $x_2$  jsou nahrazeny trigonometrickým rozvojem.

Po úpravě získáme jednorozměrné aproximační rovnice, popisující vázané podélné kmity  $v_3^{(0)}$ , šířkově rozpínavé kmity  $v_2^{(1)}$  a šířkově střižné kmity druhého řádu  $v_3^{(2)}$ , které mohou být vybudeny potenciálem přiloženým na elektrody

$$\begin{aligned} 2\bar{c}_{33}^0 v_{3,33}^{(0)} + \frac{2}{b} \bar{c}_{23}^4 v_{2,3}^{(1)} - \bar{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(2)} - \bar{e}_{33}^3 \psi_{,33}^{(2)} &= 2\rho \ddot{v}_3^{(0)}, \\ c_{44}^{(1)} v_{2,33}^{(1)} + \frac{2}{3b} (\bar{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{3,3}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \bar{c}_{22}^1 v_2^{(1)} - \\ &\quad - \frac{2}{b} \bar{c}_{23}^4 v_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{3b} \bar{e}_{32}^4 \psi_{,3}^{(2)} = \rho \ddot{v}_2^{(1)}, \\ -\bar{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} (\bar{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{2,3}^{(1)} + \bar{c}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 c_{44} v_3^{(2)} + \bar{e}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} &= \rho \ddot{v}_3^{(2)}, \\ -\bar{e}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} \bar{e}_{32}^4 v_{2,3}^{(1)} + \bar{e}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \bar{e}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \varepsilon_{22} \psi^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kde  $\bar{c}_{\lambda\mu}^n$ ,  $\tilde{c}_{\lambda\mu}^n$ ,  $c_{\lambda\mu}^{(n)}$ ,  $\bar{e}_{i\lambda}^n$ ,  $\hat{e}_{i\lambda}^n$  a  $\bar{\varepsilon}_{ij}^n$  jsou modifikované složky materiálových konstant. Vlastní tvary kmitů jsou znázorněny na obr. 4.5.



Obr. 4.5: Podélné  $v_3^{(0)}$ , šířkově rozpínavé  $v_2^{(1)}$  a symetrické šířkově střižné kmity  $v_3^{(2)}$

Řešení rovnic (4.16) uvažujme ve tvaru jednotlivých stojatých vln

$$\begin{aligned}
 v_3^{(0)} &= A_1 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\
 v_2^{(1)} &= A_2 \cos(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\
 v_3^{(2)} &= A_3 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\
 \psi^{(2)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_{33}}} A_4 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dosazením řešení (4.17) do vlnových rovnic (4.16) a použitím vztahů (4.10) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} D_{1n} \\ D_{2n} \\ D_{3n} \\ D_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.18}$$

Soustava (4.18) má netriviální řešení pro nenulová  $A_i$ , pokud je determinant matice koeficientů  $\mathbf{D}$  nulový. Tuto disperzní závislost opět vyjádříme symbolicky

$$D(\Omega, \bar{\xi}) = 0. \tag{4.19}$$

Okrajové podmínky pro  $x_3 = \pm c$  předpokládáme ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \sigma_3^{(0)} &= 2\bar{c}_{33}^0 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{c} (\bar{c}_{33}^0 - \tilde{c}_{33}^0) v_3^{(0)} + \frac{2}{b} \tilde{c}_{23}^4 v_2^{(1)} - \bar{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(2)} + \\
 &\quad + \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^3 - \tilde{c}_{33}^3) v_3^{(2)} - \bar{e}_{33}^3 \psi_{,3}^{(2)} + \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^3 - \tilde{e}_{33}^3) \psi^{(2)} = -2\tilde{e}_{33}^0 \frac{\psi_0}{c}, \\
 \sigma_4^{(1)} &= c_{44}^{(1)} v_{2,3}^{(1)} + \frac{8}{3b} c_{44} v_3^{(2)} = 0, \\
 \sigma_3^{(2)} &= -\bar{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^3 - \tilde{c}_{33}^3) v_3^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{c}_{23}^5 v_2^{(1)} + \bar{c}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \\
 &\quad - \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^2 - \tilde{c}_{33}^2) v_3^{(2)} + \bar{e}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} - \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^2 - \tilde{e}_{33}^2) \psi^{(2)} = \tilde{e}_{33}^5 \frac{\psi_0}{c}, \\
 d_3^{(2)} &= -\bar{e}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^3 - \tilde{e}_{33}^3) v_3^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 v_2^{(1)} + \bar{e}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \\
 &\quad - \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^2 - \tilde{e}_{33}^2) v_3^{(2)} - \bar{\varepsilon}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} + \frac{1}{c} (\bar{\varepsilon}_{33}^2 - \tilde{\varepsilon}_{33}^2) \psi^{(2)} = \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \frac{\psi_0}{c},
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

kde  $\sigma_\lambda^{(n)}$  a  $d_i^{(n)}$  jsou průměrné hodnoty složek elastického napětí a elektrického posunutí v tloušťce  $2a$  a  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^n$  jsou modifikované složky permitivity.

Úplné řešení vázaných kmitů je dáno lineární kombinací čtyřech dílčích stojatých vln

$$\begin{aligned}
v_3^{(0)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{1n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
v_2^{(1)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{2n} B_n \cos(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
v_3^{(2)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{3n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\
\psi^{(2)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_{33}}} \sum_{n=1}^4 \alpha_{4n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

kde  $\alpha_{in}$  jsou poměrné amplitudy.

Dosadíme-li celkové řešení (4.21) do okrajových podmínek (4.20), získáme soustavu nehomogenních lineárních rovnic pro čtyři neznámé amplitudy  $B_i$

$$\begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ M_{3n} \\ M_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^0}{c_{44}} \frac{2b}{\pi c} \psi_0 \\ 0 \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^5}{c_{44}} \frac{2b}{\pi c} \psi_0 \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^3}{c_{44}} \frac{2b}{\pi c} \psi_0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

V případě rezonance je determinant matice koeficientů  $\mathbf{M}$  nulový

$$M\left(\Omega, \frac{c}{b}\right) = 0. \tag{4.23}$$

## 5 Frekvenční spektrum vázaných kmitů

Teoretický popis vázaných kmitů odvozený v předchozí kapitole je použit pro výpočet frekvenčního spektra rezonátorů z piezoelektrické PZT keramiky APC 841 a APC 856 výrobce APC International, Ltd. Výchozí materiálové konstanty byly převzaty z prací [13], [14].

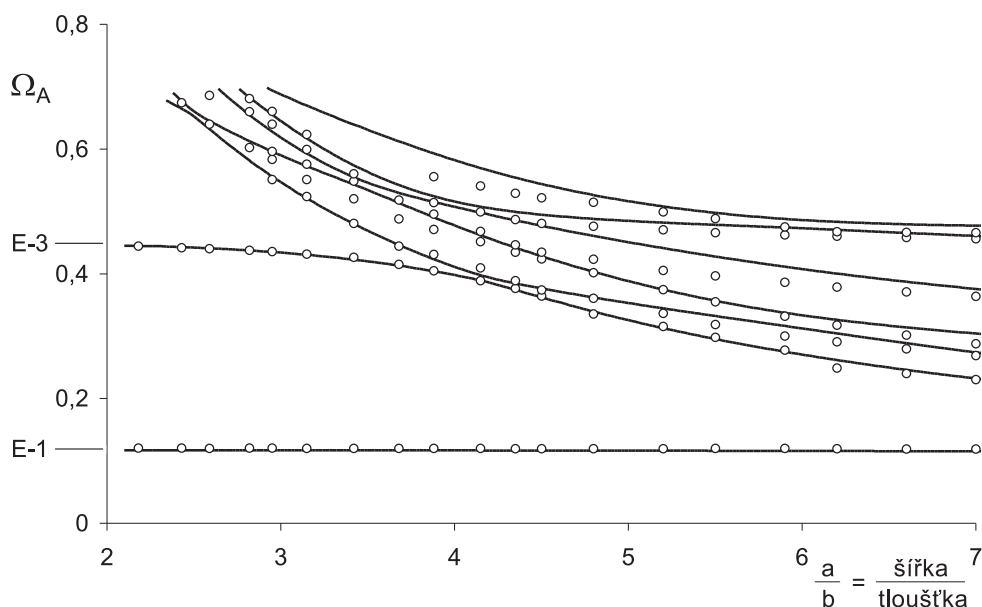
Požadovaným výsledkem řešení vázaných kmitů je obvykle závislost rezonanční frekvence rezonátoru na velikosti jeho rozměrů. Graficky je tato závislost vyjádřena ve formě *frekvenčních křivek*, které zobrazují závislost poměrné rezonanční frekvence  $\Omega$  na poměru vybraných rozměrů rezonátoru.

Frekvenční spektrum vázaných kmitů podélně polarizovaných piezoelektrických rezonátorů získáme současným řešením aproximačních rovnic (4.12) a (4.15), získaných rozvinutím veličin ve směru šířky do řady trigonometrických funkcí, nebo rovnic (4.19) a (4.23), odvozených metodou průměrování veličin přes tloušťkovou souřadnici pásku. Abychom odlišili výsledky určené jednotlivými způsoby výpočtu, označíme hodnoty frekvencí vypočtených



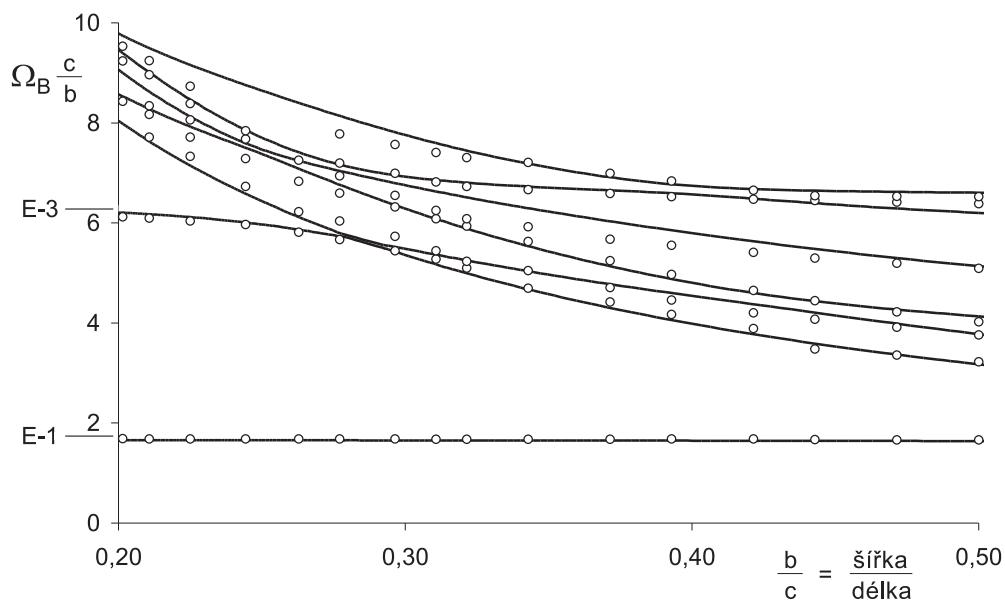
z rovnic (4.12) a (4.15) indexem  $A$ , hodnoty získané řešením rovnic (4.19) a (4.23) pak indexem  $B$ . Poměrná frekvence popsaná vztahem (4.10) je pro jednotlivé metody definována odlišně, v prvním případě označuje proměnná  $2b$  tloušťku, ve druhém případě šířku pásku.

Vypočtené frekvenční křivky, získané oběma způsoby výpočtu, jsou vyneseny na obr. 5.1 a 5.2. Kroužky v grafech vyznačují poměrné hodnoty naměřených frekvencí [15]. Na obrázcích je zobrazeno sedm frekvenčních křivek, odpovídajících sedmi nejnižším módům uvažovaného podélně polarizovaného páskového rezonátoru. První a třetí poměrné rezonanční frekvence tenké tyčinky, vypočtené pomocí (4.4), jsou vyneseny na svislé ose a označeny symboly E-1, E-3. Jak je zřejmé, blíží se vypočtené frekvenční křivky pro malé poměry šířky k tloušťce, resp. šířky k délce hodnotám určeným pomocí jednoduché aproximace rezonátoru tenkou tyčinkou.

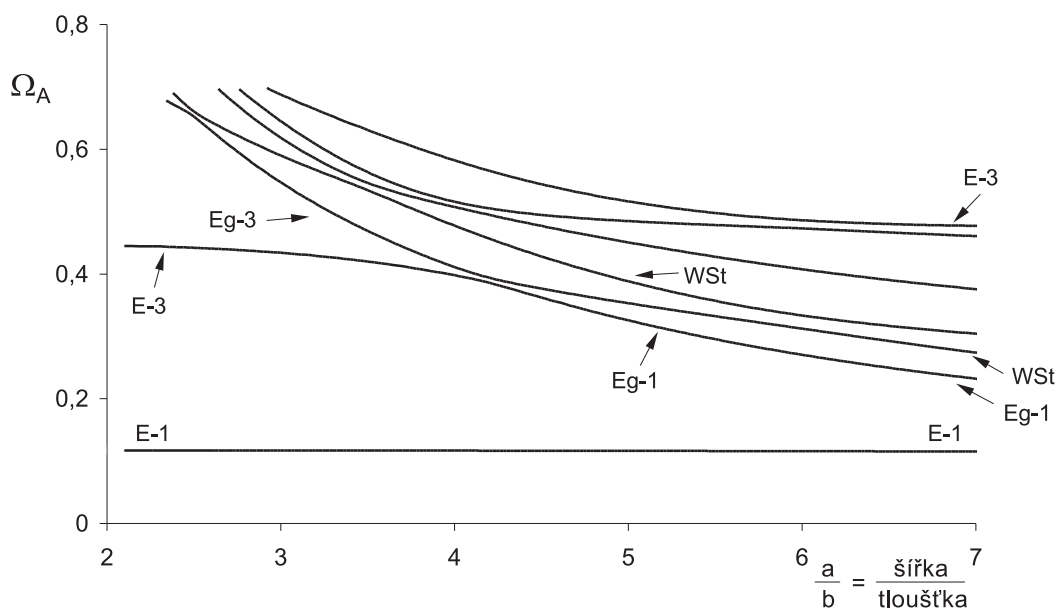


Obr. 5.1: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 841 s poměrem délky a tloušťky 14/1

Jednorozměrné vlastní tvary kmitu, určené rozložením poměrných amplitud dílčích módů podél délky rezonátoru, lze vypočítat ze vztahů (4.9), resp. (4.21). Modální tvary rezonátoru jsou ve frekvenčním spektru silně ovlivněny vzájemnou vazbou jednotlivých kmitů, existuje však několik oblastí, kde je tvar kmitu určen jedním dominantním módem. V analyzované frekvenčním intervalu se objevují módy převážně podélné E- $n$ , hranové (edge) Eg- $n$  a základní šířkově rozpínavé WSt. Úseky frekvenčních křivek s těmito dominantními kmity jsou přibližně vyznačeny šipkami na obr. 5.3, kde číslo  $n$  u písmenného označení módu označuje jeho řád.



Obr. 5.2: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 841



Obr. 5.3: Oblasti s převážně podélnými (E-n), hranovými (Eg-n) a základními šířkově rozpínávanými (WSt) módy kmitů

## 6 Závěr

Analytické řešení kmitů rezonátorů z piezoelektrické keramiky představuje poměrně obtížnou problematiku. Struktura keramického materiálu je nehomogenní a jeho vlastnosti jsou závislé zejména na teplotě, čase, technologii výroby nebo podmínkách polarizace. Tato skutečnost se projevuje rozptylem materiálových vlastností různých vzorků téhož materiálu a silně nelineárními vlastnostmi. V případě podélně polarizovaných páskových rezonátorů buzených elektrickým polem ve směru délky je nelineární chování ještě výraznější.

Popis kmitů piezokeramických rezonátorů respektující nelineární vlastnosti je složitý a výpočetně náročný a vyžaduje znalost nelineárních konstant vyšších řádů, které v mnoha případech není možné stanovit. Obvykle se tedy přistupuje k popisu pomocí lineárních teorií, používaných úspěšně pro analýzu kmitů rezonátorů z monokrystalických materiálů. Tento postup je vyhovující pro případ velmi nízké (lineární) úrovně buzení, ale výpočet je stále zatížen chybou vyplývající z rozptylu materiálových parametrů. Z tohoto důvodu se liší vypočtená a skutečná velikost rezonanční frekvence a jejich poměrná odchylka bývá obvykle v jednotkách procent. Tato hodnota ovšem spadá do běžné tolerance rezonančních frekvencí piezokeramických rezonátorů, která je dosahována při výrobě. Popis lineárními vztahy je tedy v řadě případů postačující.

V práci je také přistoupeno k analýze kmitů piezokeramických páskových rezonátorů za pomoci lineárních vztahů. Z piezoelektrických stavových rovnic vyplývá, že roztažné kmity páskových rezonátorů nejsou vázány s ohybovými módy a vlivem příčné izotropie látky ani s torzními kmity. Na jednoduché aproximaci rezonátoru kmitajícího čistě podélnými módy je pak ukázáno, že pro keramický materiál s velkým koeficientem elektromechanické vazby je vliv okrajových podmínek na vypočtené hodnoty velmi výrazný.

Přínosem disertační práce jsou dva ucelené systémy jednorozměrných aproximačních rovnic, popisující vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střižné kmity podélně polarizovaných páskových rezonátorů s pravoúhlým průřezem z piezoelektrické keramiky, buzené harmonickým elektrickým polem působícím ve směru délky. Vztahy byly odvozeny dvěma různými postupy z výchozí Leeiho aproximační dvourozměrné teorie kmitů piezoelektrických desek. Výsledný popis představuje nahrazení rezonátoru modelem se třemi stupni volnosti, který charakterizuje jeho chování až do frekvencí přesahujících mezní frekvenci symetrického šířkově střižného módu.

První soustava, získaná z dvourozměrných rovnic rozvojem veličin do řady funkcí šířkové souřadnice, vychází z řešení uvedeného Zelenkou. Původní formulace pohybových rovnic je novým odvozením opravena na správný tvar a doplněna o odpovídající okrajové podmínky. Způsob odvození byl původně použit pro řešení kmitů křemenných rezonátorů a obsahuje tak některé zjednodušující postupy.

Nově byla formulována druhá soustava rovnic, kterou jsme odvodili využitím metody průměrování veličin přes tloušťkovou souřadnici. Oproti předchozí soustavě respektuje ve větší míře vazby mezi jednotlivými módy kmitů a můžeme předpokládat, že představuje přesnější popis uvažovaných lineárních kmitů rezonátoru.

Výsledky získané řešením obou systémů rovnic byly navzájem porovnány pro různé případy piezoelektrické keramiky a jejich odchylky jsou uvnitř tolerance rezonanční frekvence reálných rezonátorů. Z tohoto hlediska lze tyto soustavy považovat za ekvivalentní.

Oba systémy shodně popisují teoretické vlastní tvary kmitů páskových rezonátoru.

V analyzované frekvenční oblasti byly identifikovány módy převážně podélné, hranové (edge) a základní šířkově rozpínavé. Stejné tvary kmitů a jejich rozložení ve frekvenčním spektru byly dříve publikovány také pro případ kmitů příčně polarizovaných páskových keramických rezonátorů.

Teoretické hodnoty byly porovnány s naměřenými rezonančními frekvencemi páskových rezonátorů z tvrdé a měkké PZT keramiky. Jejich odchylka je také v řádu jednotek procenta a splňuje výše uvedené předpoklady. Pro velmi malé hodnoty tloušťky a šířky v poměru k délce rezonátoru a také pro základní mód v širokém rozsahu poměrů šířky a délky můžeme popis kmitů nahradit jednoduchým modelem čistě podélně kmitající tyčinky.

Výsledné jednorozměrné aproximační rovnice lze použít pro analýzu kmitů rezonátorů vyrobených z libovolného piezoelektrického materiálu, jehož materiálové vlastnosti mají symetrii odpovídající třídě  $6mm$  hexagonální soustavy, pokud jsou známy potřebné materiálové konstanty. U řady komerčně vyráběných druhů piezoelektrické keramiky bohužel nejsou dostupné všechny materiálové konstanty nutné pro výpočet. Při interpretaci výsledků je pak třeba přihlídnout ke vlivu nelineárních vlastností, které jsou uvedeny v této práci.

## Literatura

- [1] Zelenka, J.: Piezoelectric Resonators and their Applications. Academia, Praha 1986.
- [2] Mindlin, R. D.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Vibrations of Elastic Plates. US Army Signal Corps Engineering Laboratory, Fort Monmouth 1955.
- [3] Tiersten, H. F.: Linear Piezoelectric Plate Vibrations. Plenum Press, New York 1969.
- [4] Lee, P. C. Y., Syngellakis, S., Hou, J. P.: A Two-Dimensional Theory for High-Frequency Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates with or without Electrodes. Journal of Applied Physics 61(4), str. 1249-1262, 1987.
- [5] Lee, P. C. Y., Yu, J. D., Lin, W. S.: A New Two-Dimensional Theory for Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates with Electroded Faces. Journal of Applied Physics 83(3), str. 1213-1223, 1998.
- [6] Lee, P. C. Y.: Extensional, Flexural and Width-Shear Vibrations of Thin Rectangular Crystal Plates. Journal of Applied Physics 42(11), str. 4139-4144, 1971.
- [7] Lee, P. C. Y., Wang, J.: Vibrations of AT-Cut Quartz Strips of Narrow Width and Finite Length. Journal of Applied Physics 75(12), str. 7681-7695, 1994.
- [8] Zelenka, J.: The Forced Vibrations of Electroded Piezoelectric Bars. In: Proceedings of 15th European Frequency and Time Forum, str. 345-347, Neuchâtel 2001.
- [9] Lee, P. C. Y., Edwards, N. P., Lin, W. S., Syngellakis, S.: Second-Order Theories for Extensional Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates and Strips. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 49(11), str. 1497-1506, 2002.
- [10] <http://www.americanpiezo.com/>. Firemní stránky APC International, Ltd. Mackeyville, USA, červen 2005.
- [11] Royer, D., Dieulesaint, E.: Elastic Waves in Solids I. Free and Guided Propagation. Springer-Verlag, Berlin 2000. ISBN 3-540-65932-3
- [12] Hána, P., Burianová, L., Barošová, D., Zelenka, J.: Contribution to the Measurement of the Electromechanical Coupling Factor  $k_{33}$  of Piezoelectric Ceramics. Ferroelectrics 224, str. 39-46, 1999.
- [13] Burianová, L., Prokopová, M., Pustka, M., Nosek, J.: Characterization of the Hard APC 841 Ceramics. ICPR Report No. 2. TU v Liberci 2005. Vypracováno pro APC International, Ltd. Mackeyville, USA.
- [14] Burianová, L., Prokopová, M., Pustka, M., Nosek, J.: Characterization of PZT Ceramics in a Wide Temperature Range. ICPR Report No. 1. TU v Liberci 2003. Vypracováno pro APC International, Ltd. Mackeyville, USA.
- [15] Burianová, L.: soukromé sdělení, 2005.

## Přehled publikovaných prací

Pustka, M., Nosek, J.: Piezoelektrický aktuátor na bázi relaxorů PZN-PT. *Acta Electrotechnica et Informatica* 2(2), str. 29-34, 2002.

Richter, A., Pustka, M., Zelenka, J.: The Computation of Travelling-Wave Velocity on the Surface of Piezoceramic Drives. In: *Proceedings of 15th International Conference on Electrical Drives and Power Electronics*, str. 290-293, Vysoké Tatry 2003.

Nosek, J., Pustka, M.: About the Coupling Factor of the Gallium Orthophosphate ( $\text{GaPO}_4$ ) and Its Influence to the Resonance - Frequency Temperature Dependences. In: *Proceedings of 2003 IEEE International Frequency Control Symposium*, str. 674-678, Tampa 2003.

Burianová, L., Pustka, M., Prokopová, M., Nosek, J.: Characterization of PZT Ceramics in a Wide Temperature Range. In: *Proceedings of the 6th International Workshop on Electronics, Control, Measurement and Signals*, str. 413-417, Liberec 2003.

Richter, A., Pustka, M., Rydlo, P., Kolář, M.: Ultrasonic Piezoceramic Motor - The Computation of Travelling-Wave Velocity on the Stator Surface and Excitation by PWM Modulation with Higher Harmonic Suppression. *Ceramics International* 30(7), str. 1857-1861, 2004.

Richter, A., Rydlo, P., Pustka, M., Kolář, M.: Pulse Driving of Piezoceramic Actuators and Their Present Technical Limitations. *Ferroelectrics* 320, str. 125-132, 2005.

Burianová, L., Hána, P., Pustka, M., Prokopová, M., Nosek, J.: Non-linear Properties of PZT Ceramics in the Wide Temperature Range. *Journal of the European Ceramic Society* 25(12), str. 2405-2409, 2005.

Burianová, L., Pustka, M., Nosek, J.: Study of the Frequency Spectrum of Forced Vibrations of Piezoceramic Bars Polarized in Length Direction. Bude prezentováno na 2005 IEEE International Frequency Control Symposium, Vancouver, srpen 2005.

Nosek, J., Pustka, M., Burianová, L.: The Non-Linear Equivalent Circuit of the Vibrating Y-Cut  $\text{GaPO}_4$  Resonator. Bude prezentováno na 2005 IEEE International Frequency Control Symposium, Vancouver, srpen 2005.

Nosek, J., Pustka, M.: Determination of the Electromechanical Coupling Factor of the Gallium Orthophosphate ( $\text{GaPO}_4$ ). *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v tisku.

Pustka, M., Burianová, L., Nosek, J.: Coupled Extensional Vibrations of Longitudinally Polarized Piezoceramic Strips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, zasláno do tisku.

## Annotation

### Frequency Spectrum of Piezoceramic Resonators Polarized in Longitudinal Direction

Ing. Martin Pustka

In the piezoelectric resonator design, it is necessary to study the frequency spectrum of vibrations of the piezoelectric element in detail, particularly the influence of dimensions on the resonant frequencies. The analytical description of coupled vibrations, based on Mindlin's or Lee's two-dimensional piezoelectric plate theories, is usually used for the analysis.

This Ph.D. Thesis deals with the solution of coupled vibrations of resonators with a shape of thin narrow plates with rectangular cross section, manufactured from piezoelectric ceramics and polarized in longitudinal direction. Two systems of one-dimensional approximative equations for coupled length-extensional, width-stretch and symmetric width-shear vibrations are deduced from Lee's two-dimensional equations using the method of expanding in series of the width coordinate and method of averaging through the thickness. These systems are completed by the boundary conditions respecting the case of electrically forced vibrations of the plate.

The equations are used to calculate the frequency spectrum of vibrations for piezoelectric resonators of hard and soft PZT ceramics and for the determination of mode shapes. The theoretical results are compared with experimental data and the relative deviation is of the order of several per cent. The calculation accuracy corresponds to the usual tolerance of resonant frequency of piezoceramic resonators.

The resulted equations can be used for any piezoelectric material with the symmetry class  $6mm$ . The derivation of one-dimensional approximate equations assumes the linear behavior of the piezoelectric resonator. Using the equations it is necessary to take into account the nonlinear properties of piezoelectric ceramics and the high scattering range of its material constants.

Keywords: piezoelectric resonator, frequency spectrum, piezoelectric plate,  
PZT ceramics

Ing. Martin Pustka

**Frekvenční spektrum podélně polarizovaných rezonátorů z piezoelektrické keramiky**  
Autoreferát disertační práce

Technická univerzita v Liberci  
Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Náklad 20 výtisků

červenec 2005